UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
ANIMACIJA U INŽENJERSTVU

Dušan Ilić

BOJE I OSVETLJENOST

Računski zadaci

NOVI SAD
2018

S A D R Ž A J

1. Svetlost kao elektromagnetni talas

1.1. Intenzitet magnetnog polja ravnog monohromatskog talasa u vakuumu dat je izrazom:

$$B = B_0 \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

pri čemu je $B_0 = 2\cdot 10^{-9}\,T$ i $\omega = \pi\cdot 10^{15}\,rad/s$. Izračunati:

a) frekvenciju, talasnu dužinu i talasni broj ovog talasa;

b) jačinu električnog polja.

REŠENJE:

Najjednostavniji oblik talasnog kretanja je ravni harmonijski talas kod koga se intenziteti električnog i magnetnog polja menjaju na sledeći način:

$$E_y = E_0\,\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = E_0\,\sin\left(\omega t - kx\right),$$

$$B_z = B_0\,\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = B_0\,\sin\left(\omega t - kx\right),$$

gde je $k = \omega/v = 2\,\pi/\lambda-$ talasni broj, a $\omega = 2\pi\nu-$ ugaona frekvencija (indeksi „y" i „z" odnose se na ose Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema i ukazuju da su vektori $\vec{E}$ i $\vec{B}$ normalni kako međusobno, tako i na pravac prostiranja talasa – u ovom slučaju to je pravac $x-$ose). Kao i kod mehaničkih talasa i ovde je $v = \lambda\cdot\nu = \omega/k$, pri čemu je:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0\mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}.$$

Veza između električnog i magnetnog polja u elektromagnetnom talasu je:

$$B = \frac{1}{v}\cdot E.$$

a) Iz relacije

$$\omega = 2\pi\nu,$$

dobija se da je:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi \cdot 10^{15}\, rad/s}{2\,\pi} = \frac{1}{2} \cdot 10^{15} = 5 \cdot 10^{14}\, Hz \;.$$

Talasna dužina talasa je:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^{8}\, \frac{m}{s}}{5 \cdot 10^{14}\, Hz} = 6 \cdot 10^{-7}\, m = 600\, nm \;,$$

a talasni broj:

$$k = \frac{2\,\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3,14}{6 \cdot 10^{-7}\, m} = 1,05 \cdot 10^{7}\, m^{-1} \;.$$

b) Amplituda električnog polja jednaka je:

$$E_0 = c \cdot B_0 = 0,6\, \frac{V}{m} \;,$$

tako da se električno polje menja u skladu sa jednačinom:

$$E\,[V/m] = 0,6\, \sin \pi \cdot 10^{15} \left(t - \frac{x}{c} \right) \;.$$

1.2. Talasna dužina žute natrijumove svetlosti u vakuumu jednaka je $\lambda = 589\, nm$. Koliko iznose odgovarajuća frekvencija i talasni broj?

REŠENJE:

Iz relacije:

$$\lambda \cdot \nu = c \;,$$

sledi:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{8}\, \frac{m}{s}}{589 \cdot 10^{-9} m} = 5,09 \cdot 10^{14}\, Hz \;,$$

dok na osnovu veze:

$$k = \frac{2\,\pi}{\lambda}$$

sledi:

$$k = \frac{2 \cdot 3,14}{589 \cdot 10^{-9} m} = 1,07 \cdot 10^{7}\, m^{-1} \;.$$

1.3. Koliko iznose brzina širenja i talasna dužina elektromagnetnog talasa čija je frekvencija $\nu = 600\,MHz$ u benzolu ($\varepsilon_r = 2,3$)? Benzol smatrati nemagnetnom sredinom ($\mu_r = 1$).

REŠENJE:
S obzirom da je :

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{3 \cdot 10^8\,m/s}{\sqrt{2,3}} = 1,98 \cdot 10^8\,m/s \ ,$$

sledi:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{1,98 \cdot 10^8\,m/s}{600 \cdot 10^6 Hz} = 0,33\,m \ .$$

1.4. Elektromagnetni talas frekvencije $9\,MHz$ prelazi iz vakuuma u nemagnetnu sredinu ($\mu_r = 1$) relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 81$ (voda). Kolika je promena talasne dužine ovog talasa pri prelasku iz jedne sredine u drugu?

REŠENJE:
Talasna dužina u vakuumu iznosi:

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu} \ ,$$

a u nemagnetnoj sredini relativne permitivnosti ε_r:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \ ,$$

gde je:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\,\mu_r}} \ ,$$

pa je:

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \lambda - \lambda_0 = \frac{c}{\nu\sqrt{\varepsilon_r}} - \frac{c}{\nu} = \frac{c}{\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} - 1\right) = \\ &= \frac{3 \cdot 10^8\,m/s}{9 \cdot 10^6\,Hz}\left(\frac{1}{\sqrt{81}} - 1\right) = -29,6\,m \ ,\end{aligned}$$

odnosno:

$$\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda} = \left|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} - 1\right| = 0,89 = 89\% \ .$$

1.5. Električno polje svetlosnog talasa dato je izrazom:

$$E\,[V/m] = 0,5 \cdot \sin\pi \left(1,2 \cdot 10^{15}\, t - 4 \cdot 10^{6}\, x\right) .$$

Odrediti amplitudu, frekvenciju, talasnu dužinu, period i brzinu ovog talasa.

REŠENJE:

Upoređivanjem date jednačine sa jednačinom ravnog harmonijskog talasa:

$$E = E_0 \, \sin\omega \left(t - \frac{x}{v}\right) = E_0 \, \sin\left(\omega t - kx\right)$$

može se zaključiti sledeće:

- Amplituda talasa je:
$$E_0 = 0,5\, \frac{V}{m} \; ,$$
- frekvencija:
$$\nu = \frac{\omega}{2\,\pi} = \frac{1,2 \cdot 10^{15}\,\pi}{2\,\pi} = 6 \cdot 10^{14}\, Hz \; ,$$
- talasna dužina:
$$\lambda = \frac{2\,\pi}{k} = \frac{2\,\pi}{4\,\pi \cdot 10^{6}\, m^{-1}} = 5 \cdot 10^{-7}\, m = 500\, nm \; ,$$
- period:
$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} = 1,67 \cdot 10^{-15}\, s \; ,$$
- i brzina:
$$v = \lambda \cdot \nu = 5 \cdot 10^{-7}\, m \cdot 6 \cdot 10^{14}\, Hz = 3 \cdot 10^{8}\, \frac{m}{s} \; .$$

Zadaci za samostalni rad:

1.6. Dato je električno polje elektromagnetnog talasa u vakuumu:

$$E_y = E_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) ,$$

gde je $E_0 = 50 \, N/C$ i $\omega = 1,02 \, \pi \cdot 10^{15} \, \frac{rad}{s}$ (žuta svetlost). Odrediti frekvenciju, talasnu dužinu i period ovog talasa.

1.7. Ravni elektromagnetni talas frekvencije $1,5 \cdot 10^{14} \, Hz$ prostire se kroz vakuum. Amplituda električnog polja ovog talasa iznosi $60 \, V/m$. Napisati jednačine za jačine električnog i magnetnog polja tog talasa.

1.8. U homogenoj nemagnetnoj sredini relativne dielektrične propustljivosti $\varepsilon_r = 3$ prostire se elektromagnetni talas. Amplituda jačine električnog polja iznosi $10 \, V/m$. Kolika je amplituda jačine magnetnog polja?

1.9. U nemagnetnoj sredini prostire se ravan elektromagnetni talas. Jačina električnog polja talasa menja se po zakonu:

$$E = 10 \, \sin \left(10^{10} \, t - 66,7 \, x \right) \quad \textbf{(u jedinicama SI)} \, .$$

Kolika je brzina talasa u toj sredini? Kolika je relativna dielektrična propustljivost sredine?

2. Korpuskularna priroda svetlosti

2.1. Koliko fotona emituje svake sekunde radio-odašiljač snage $12\,kW$ koji radi na talasnoj dužini $205\,m$?

REŠENJE:
Emitovana energija jednaka je celobrojnom umnošku elementarnog kvanta energije (fotona):

$$E = N \cdot h\nu = N\,\frac{hc}{\lambda}\ ,$$

a pošto je:

$$E = P \cdot t = 12 \cdot 10^3 W \cdot 1s = 1,2 \cdot 10^4\,J\ ,$$

sledi:

$$N = \frac{E\,\lambda}{h \cdot c} = \frac{1,2 \cdot 10^4\,J\ \cdot 205\,m}{6,626 \cdot 10^{-34}\,J\,s \cdot 3 \cdot 10^8\,m/s} = 1,24 \cdot 10^{31}\ .$$

2.2. Izračunati frekvenciju fotona koji nastaje kada se elektron kinetičke energije $E = 20\,keV$ zaustavi pri sudaru sa teškim jezgrom, pod pretpostavkom da se 80% kinetičke energije elektrona transformiše u energiju fotona.

REŠENJE:
Pod uslovima zadatka sledi da je:

$$0,8 \cdot E_k = h \cdot \nu\ ,$$

a odavde je:

$$\nu = \frac{0,8 \cdot E_k}{h} = \frac{0,8 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} J}{6,626 \cdot 10^{-34} J\,s} = 3,86 \cdot 10^{18}\,Hz\ .$$

2.3. Monohromatska svetlost talasne dužine $450nm$ pada normalno na površinu $S = 4cm^2$. Ako je intenzitet svetlosti $I = 0,15\,\frac{W}{m^2}$, odrediti koliko dugo površina treba da bude izložena svetlosti da bi na nju palo 10^{20} fotona.

REŠENJE:
Intenzitet svetlosti:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{E}{S \cdot t} \,,$$

a energija emitovanih fotona:

$$E = N \cdot h\,\nu = N\,\frac{h\,c}{\lambda} \,.$$

Kombinacijom ovih relacija dobija se:

$$\begin{aligned} t &= \frac{E}{I \cdot S} = \frac{N\,h\,c}{I\,S\,\lambda} = \frac{10^{20} \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} J\,s \cdot 3 \cdot 10^{8} \frac{m}{s}}{0,15 \frac{W}{m^2} \cdot 4 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot 450 \cdot 10^{-9} m} = \\ &= 7,362 \cdot 10^{5}\, s = 8,52\,\text{dana} \,. \end{aligned}$$

2.4. Spektralna gustina Sunčevog zračenja ima maksimum za talasnu dužinu $480\,nm$.

a) Izračunati temperaturu Sunčeve površine pod pretpostavkom da Sunce zrači kao crno telo.

b) U kom delu spektra bi spektralna gustina bila maksimalna kada bi se temperatura Sunca smanjila na jednu trećinu sadašnje vrednosti?

REŠENJE:

a) Iz Vinovog zakona se dobija:

$$T = \frac{b}{\lambda_m} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} K \cdot m}{480 \cdot 10^{-9} m} = 6041,7\,K \,.$$

b) Na temperaturi:

$$T' = \frac{T}{3} = 2013,9\,K$$

maksimum zračenja bio bi na talasnoj dužini:

$$\lambda'_m = \frac{b}{T'} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} K \cdot m}{2013,9\,K} = 1,44 \cdot 10^{-6} m \,.$$

2.5. Užarena ploča površine $20\,cm^2$ zrači $0,5\,kWh$ energije u minuti.

a) Odrediti temperaturu ploče ako pretpostavimo da zrači kao apsolutno crno telo.

b) Da li je ta ploča zaista crna?

REŠENJE:

a) Iz Štefan–Bolcmanovog zakona:

$$I = \frac{P}{S} = \sigma \cdot T^4 \ ,$$

dobija se da je ukupna izračena energija:

$$E = P \cdot t = S\,\sigma\,T^4 t \ ,$$

a odavde je:

$$T = \sqrt[4]{\frac{E}{S\sigma\,t}} = \sqrt[4]{\frac{0,5 \cdot 10^3 \cdot 3600\,J}{20 \cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}\frac{W}{m^2\,K^4} \cdot 60\,s}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T = 4033\,K.$$

b) Talasna dužina na kojoj je spektralna gustina maksimalna dobija se iz Vinovog zakona:

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} K \cdot m}{4033\,K} = 7,19 \cdot 10^{-7}\,m = 719\,nm \ .$$

Ova talasna dužina pripada krajnjem crvenom delu vidljivog spektra, tako da će ploča imati tamnocrvenu boju.

2.6. Pretpostavimo da se zbog procesa na Suncu njegov poluprečnik poveća za 5%, a najverovatnija talasna dužina u spektru Sunčevog zračenja se pomeri sa $500\,nm$ na $400\,nm$. Koliko bi puta više u tom slučaju Sunce emitovalo energije u jedinici vremena? Sunce smatrati idealno crnim telom sfernog oblika.

REŠENJE:

Polazeći od formule:

$$I = \frac{E}{S \cdot t} = \frac{P}{S}$$

i zakona zračenja crnog tela:

$$I = \sigma T^4 \quad \text{(Štefan-Bolcmanov)} \qquad , \qquad \lambda_m = \frac{b}{T} \quad \text{(Vinov)} \; ,$$

dobija se da je:

$$P = I \cdot S = \sigma T^4 \cdot 4\pi R_S^2 = 4\pi\sigma R_S^2 \cdot \frac{b^4}{\lambda_m^4} \; .$$

Odnos snage emitovane sa Sunčeve površine u oba slučaja dobijamo uzimajući da je $R_{S2} = 1,05 \cdot R_{S1}$, $\lambda_{m1} = 500\,nm$ i $\lambda_{m2} = 400\,nm$:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{R_{S2}}{R_{S1}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}}\right)^4 = (1,05)^2 \cdot \left(\frac{500\,nm}{400\,nm}\right)^4 = 2,69 \; .$$

2.7. Temperatura čovekovog tela je $T_{\check{c}} = 310\,K$, a okoline $T_{o} = 300\,K$.

a) Izračunati efektivnu snagu zračenja koju čovek gubi pod tim uslovima ako je površina kože $S = 2\,m^2$.

b) Izračunati i talasnu dužinu λ_m maksimuma spektralnog zračenja.

REŠENJE:

a) Prema Štefan-Bolcmanovom zakonu, intenzitet zračenja koje čovek emituje sa površine od $1\,m^2$ na temperaturi $T_{\check{c}} = 310\,K$ je:

$$I_1 = \sigma T_{\check{c}}^4 \; .$$

Sa druge strane na njega pada zračenje iz okoline čiji je intenzitet:

$$I_2 = \sigma T_{o}^4 \; .$$

Snaga koju čovek gubi po jedinici površine jednaka je razlici intenziteta zračenja koje emituje i koje prima od okoline:

$$I = I_1 - I_2 = \sigma \left(T_{\check{c}}^4 - T_{o}^4\right) \; .$$

Ukupna snaga koju čovek gubi sa celog tela je:

$$P = IS = \sigma\left(T_{č}^4 - T_{o}^4\right)S$$

$$P = 5,67 \cdot 10^{-8}\frac{W}{m^2 \cdot K^4} \cdot \left[(310\,K)^4 - (300\,K)^4\right] \cdot 2\,m^2 = 129\,W\ .$$

b) Talasna dužina koja odgovara maksimumu spektralnog zračenja računa se pomoću Vinovog zakona:

$$\lambda_m = \frac{b}{T}\ ,$$

gde je b Vinova konstanta.

Za čoveka:

$$\lambda_{mč} = \frac{b}{T_{č}} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}\,m \cdot K}{310\,K} = 9,35 \cdot 10^{-6}\,m\ ,$$

a za okolinu:

$$\lambda_{mo} = \frac{b}{T_{o}} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}\,m \cdot K}{300\,K} = 9,67 \cdot 10^{-6}\,m\ .$$

2.8. Odrediti minimalnu frekvenciju zračenja koja će izazvati fotoelektrični efekat na materijalu čiji je izlazni rad $3eV$. Kom delu spektra pripada to zračenje?

REŠENJE:

Prema Ajnštajnovoj jednačini fotoelektričnog efekta:

$$h\,\nu = A + \frac{1}{2}m_e v^2\ ,$$

minimalna (granična) frekvencija (ν_g) je ona za koju je kinetička energija izbijenih fotoelektrona jednaka nuli, te je:

$$h\,\nu_g = A\ ,$$

ødavde sledi:

$$\nu_g = \frac{A}{h} = \frac{3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\,J}{6,626 \cdot 10^{-34}\,J\,s} = 7,24 \cdot 10^{14}\,Hz\ .$$

S obzirom da je odgovarajuća talasna dužina („crvena granica fotoefekta”):

$$\lambda_g = \frac{c}{\nu_g} = \frac{3 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s}}{7,24 \cdot 10^{14} \, Hz} = 414,4 \, nm \ ,$$

zračenje pripada vidljivom delu spektra (ljubičasta boja).

2.9. Crvena granica fotoelektričnog efekta za volfram iznosi $\lambda_g = 275 \, nm$. Odrediti izlazni rad elektrona, kao i brzinu izbijenih fotoelektrona ako se fotokatoda od volframa osvetli elektromagnetnim zračenjem talasne dužine $\lambda = 180 \, nm$.

REŠENJE:

Polazeći od Ajnštajnove jednačine fotoelektričnog efekta:

$$\frac{h\,c}{\lambda} = A + \frac{1}{2} \, m_e v^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{h\,c}{\lambda} = \frac{h\,c}{\lambda_g} + \frac{1}{2} \, m_e v^2 \ ,$$

sledi da je:

$$A = \frac{h\,c}{\lambda_g} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \, Js \cdot 3 \cdot 10^8 \, \frac{m}{s}}{2,75 \cdot 10^{-7} \, m} = 7,228 \cdot 10^{-19} \, J = 4,52 \, eV$$

i

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m_e} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_g} \right)} = 9,15 \cdot 10^5 \, \frac{m}{s} \ .$$

2.10. Cezijum, čiji je izlazni rad $A = 1,97 \, eV$, obasjava se svetlošću talasne dužine $\lambda = 0,476 \, \mu m$.

a) Odrediti brzinu emitovanih fotoelektrona.

b) Koliki je minimalni zaustavni napon neophodno primeniti da bi struja fotoelektrona prestala da teče kroz kolo?

REŠENJE:

a) Polazeći od jednačine fotoelektričnog efekta:

$$\frac{h\,c}{\lambda} = A + \frac{1}{2} \, m_e v^2 \ ,$$

dobija se da je:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m_e} \left(\frac{hc}{\lambda} - A \right)} = 4,74 \cdot 10^5 \, \frac{m}{s} \ .$$

b) Ajnštajnova jednačina u ovom slučaju glasi:

$$\frac{h\,c}{\lambda} = A + e\,U_k\ ,$$

a odavde je napon zaustavljanja:

$$U = \frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right) = 0,64\,V\ .$$

2.11. Eksperimentalno je ustanovljeno da najveća talasna dužina za koju je moguće ostvariti fotoelektrični efekat na metalu barijumu iznosi $\lambda_g = 496\,nm$. Koliki je napon neophodno primeniti da bi se zaustavili fotoelektroni koji izlaze iz katode od barijuma, ako se ona osvetli zračenjem talasne dužine $\lambda = 300\,nm$? Kolika je pri tome brzina izbijenih fotoelektrona?

REŠENJE:
Polazeći od Ajnštajnove jednačine fotoelektričnog efekta u obliku:

$$\frac{hc}{\lambda} = A + e\,U_k$$

i uzimajući u obzir vezu između izlaznog rada i crvene granice fotoefekta:

$$A = \frac{hc}{\lambda_g},$$

dobija se da je:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_g} + e\,U_k,$$

odakle sledi:

$$U_k = \frac{hc}{e} \cdot \frac{\lambda_g - \lambda}{\lambda_g \cdot \lambda} = 1,64\,V.$$

Brzina izbijenih fotoelektrona iznosi:

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = e\,U_k \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU_k}{m}} = 7,6 \cdot 10^5\ m/s.$$

2.12. Svetlost talasne dužine $\lambda = 350\,nm$ pada na fotokatodu i pri nekom naponu U dolazi do prekida fotoelektrične struje. Ako se talasna dužina svetlosti smanji za $\Delta\lambda = 50\,nm$, odrediti za koliko treba promeniti zakočni napon da bi ponovo došlo do prekida fotoelektrične struje.

REŠENJE:
Analiza Ajnštajnove jednačine fotoelektričnog efekta:

$$\frac{hc}{\lambda} = A + eU_k$$

pokazuje da smanjenje talasne dužine odgovara povećanju zakočnog napona:

$$\frac{hc}{\lambda - \Delta\lambda} = A + e\,(U_k + \Delta U_k).$$

Kombinovanjem gornjih jednačina dobija se:

$$\frac{hc}{\lambda - \Delta\lambda} = \frac{hc}{\lambda} + e\Delta U_k,$$

na osnovu čega konačno proizilazi:

$$\Delta U_k = \frac{hc\Delta\lambda}{e\lambda(\lambda - \Delta\lambda)} = 0,59\,V.$$

Zadaci za samostalni rad:

2.13. **Radio-antena emituje radio talase frekvencije $\nu = 1\,MHz$ snagom $P = 1\,kW$. Koliko fotona u sekundi emituje ova antena?**

2.14. **Lopta poluprečnika $r = 10\,cm$ nalazi se na temperaturi $t = 227\,°$. Kolika se energija izrači sa ove lopte za vreme $\tau = 10s$? Loptu smatrati apsolutno crnim telom.**

2.15. **Pretpostavljajući da Sunce zrači kao apsolutno crno telo, izračunati ukupnu energiju koju $1\,m^2$ površine Sunca emituje u jednoj godini. Uzeti da je temperatura površine Sunca $T = 6000\,K$.**

2.16. **Otvor na šupljoj, toplotno izolovanoj kugli ima površinu $2\,cm^2$. Temperatura zidova kugle je $T = 2000\,K$.**

a) **Odrediti talasnu dužinu na kojoj je spektralna gustina zračenja maksimalna. O kojoj se vrsti zračenja radi?**

b) **Izračunati intenzitet zračenja kao i ukupnu snagu koju zrači otvor kugle.**

2.17. **Pod dejstvom ultraljubičastog zračenja frekvencije $\nu = 1,5 \cdot 10^{15}\,Hz$ izleću elektroni iz nekog metala brzinom $v = 800\,km/s$.**

a) **Koliki je izlazni rad elektrona?**

b) **Kolika je njihova energija u eV?**

2.18. **Kolika je brzina fotoelektrona emitovanih iz srebra osvetljenog ultraljubičastim zračenjem talasne dužine $\lambda = 150\,nm$. Crvena granica fotoelektričnog efekta za srebro je $\lambda_g = 260\,nm$.**

2.19. Pri nekoj određenoj vrednosti zakočnog napona fotostruja sa površine volframa prestaje da teče. Kada se talasna dužina upotrebljene svetlosti promeni $a = 2,5$ puta, za prestanak toka fotostruje neophodno je povećati zakočni napon $b = 4$ puta. Uzimajući da je „crvena granica" fotoelektričnog efekta za volfram $\lambda_g = 275\,nm$, odrediti prvobitnu talasnu dužinu upadne svetlosti.

3. Borov model atoma

3.1. Primenom Borove teorije atoma vodonikovog tipa izračunati talasnu dužinu fotona koji se emituje pri prelasku elektrona iz drugog u prvo pobuđeno stanje atoma vodonika (glavna linija Balmerove serije), a zatim odrediti:

a) da li se svetlošću te talasne dužine može izvršiti fotoelektrični efekat na kalijumu, čiji je izlazni rad $A_K = 2,15\,eV$;

b) da li je emitovana svetlost vidljiva ljudskom oku.

REŠENJE:

Pri prelasku elektrona iz $k-$tog u $n-$to energijsko stanje atoma vodonika $(Z = 1)$ emituje se foton čija je talasna dužina određena formulom:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

a odavde, s obzirom da je u našem slučaju $k = 3$ i $n = 2$, proizilazi:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{36}\,R \Rightarrow \lambda = \frac{36}{5R} = 656,3\,nm.$$

a) Crvena granica fotoelektričnog efekta na kalijumu dobija se na osnovu relacije:

$$A_K = \frac{hc}{\lambda_g}$$

i iznosi:

$$\lambda_g = \frac{hc}{A_K} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\,Js \cdot 3 \cdot 10^8\,m/s}{2,15 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\,J} = 577,8\,nm.$$

Budući da je $\lambda > \lambda_g$, do fotoefekta neće doći.

b) Talasna dužina $\lambda = 656,3\,nm$ spada u vidljivi deo spektra (crvena boja).

3.2. Izračunati talasnu dužinu glavne linije Lajmanove serije atoma vodonika u vakuumu (λ_L), znajući da je vrednost Ridbergove konstante $R = 1,097 \cdot 10^7\, m^{-1}$. Koliko iznosi talasna dužina ove iste linije u glicerinu (λ'_L), čija je relativna dielektrična konstanta $\varepsilon_r = 49$? Glicerin smatrati nemagnetnom sredinom ($\mu_r = 1$).

REŠENJE:

Primenom uopštene Balmerove formule za atom vodonika ($Z = 1$):

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) ,$$

na glavnu liniju Lajmanove serije ($2 \mapsto 1$) dobija se:

$$\frac{1}{\lambda_L} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3R}{4} ,$$

na osnovu čega sledi:

$$\lambda_L = \frac{4}{3R} = 1,215 \cdot 10^{-7}\, m = 121,5\, nm.$$

S obzirom na relacije:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} = \lambda' \cdot \nu \qquad \text{i} \qquad \lambda \cdot \nu = c ,$$

imamo da je:

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} = \lambda'_L \cdot \frac{c}{\lambda_L}$$

i konačno:

$$\lambda'_L = \frac{\lambda_L}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} = \frac{121,5\, nm}{\sqrt{49 \cdot 1}} = 17,4\, nm .$$

3.3. Pri prelasku elektrona sa jednog od viših pobuđenih stacionarnih nivoa u osnovno energijsko stanje dvostruko jonizovanog atoma litijuma, sukcesivno se emituju dva fotona sa talasnim dužinama $\lambda_1 = 72,91\, nm$ i $\lambda_2 = 13,5\, nm$. U kom se pobuđenom kvantnom stanju nalazio elektron pre emisije?

REŠENJE:
Pri prelasku elektrona sa n-tog u neko niže ($k-$to) stacionarno energijsko stanje dvostruko jonizovanog atoma litijuma ($Z = 3$) emituje se foton čija je talasna dužina određena formulom:

$$\frac{1}{\lambda_1} = Z^2 R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) = 9R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \ , \tag{1}$$

dok je pri prelasku sa k-tog u osnovno stanje:

$$\frac{1}{\lambda_2} = 9R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{k^2} \right) \ . \tag{2}$$

Sabiranjem jednačina (1) i (2) dobija se da je:

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = 9R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

i konačno:

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{9R\lambda_1\lambda_2}}} = 3 \ .$$

3.4. U spektru nekog vodoniku sličnog jona talasna dužina treće linije Balmerove serije iznosi $108,5\,nm$. O kom se elementu radi i koliko iznosi talasna dužina glavne (prve) linije Lajmanove serije za taj element?

REŠENJE:
Primenom uopštene Balmerove formule za atom vodonikovog tipa:

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) \ ,$$

na treću liniju Balmerove serije posmatranog jona ($5 \mapsto 2$), dobija se da je:

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right) = \frac{21\,Z^2 R}{100} \ ,$$

odakle sledi:

$$Z = 10 \cdot \sqrt{\frac{1}{21\,R\lambda}} = 2 \ .$$

Radi se, prema tome, o jonu helijuma. Talasna dužina glave linije Lajmanove serije za helijum iznosi:

$$\frac{1}{\lambda_{2\mapsto 1}} = 4R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = 3R \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2\mapsto 1} = \frac{1}{3R} = 30,4\,nm\ .$$

3.5. Elektron se nalazi u $k-$tom stacionarnom stanju trostruko jonizovanog atoma berilijuma (Be^{3+}) i pri prelasku u osnovno stanje emituje foton čija je energija $E_f = 193,83\,eV$. U kom se kvantnom stanju k nalazio elektron pre emisije?

REŠENJE:

Množenjem uopštene Balmerove formule za atom vodonikovog tipa proizvodom $h \cdot c$ dobijamo:

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) \Big/ \cdot hc \quad \Rightarrow \quad \frac{hc}{\lambda} = hcZ^2R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)\ ,$$

odnosno:

$$E_f = hcZ^2R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)\ .$$

a odavde za $n = 1$ i $Z = 4$ sledi:

$$k = \sqrt{\frac{hcn^2RZ^2}{hcRZ^2 - n^2E_f}} = 3\ .$$

Zadaci za samostalni rad:

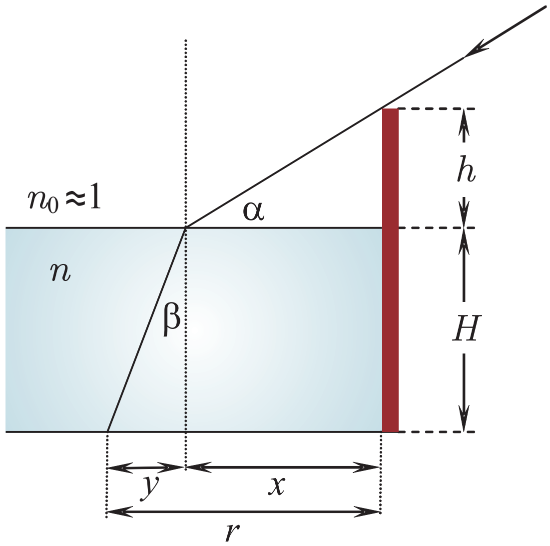
3.6. Izračunati talasnu dužinu fotona koji se emituje pri prelasku elektrona iz drugog pobuđenog u osnovno stanje dvostruko jonizovanog atoma litijuma.

3.7. Iz Lajmanove serije vodonikovog spektra izdvaja se jedna linija i njome se osvetljava fotoćelija. Katoda fotoćelije je od rubidijuma, čiji je izlazni rad $A = 2,13\,eV$. Ako je poznato da zakočni napon između katode i anode iznosi $U_k = 10\,V$, odrediti kom prelazu odgovara ta linija i kolika je brzina emitovanih fotoelektrona.

4. Odbijanje i prelamanje svetlosti

4.1. Stub je zakucan u dno reke tako da visina dela koji se nalazi iznad površine vode iznosi $h = 1\,m$. Naći dužinu senke ovog stuba na površini i na dnu reke, ako je „visina” Sunca nad horizontom $\alpha = 30°$, a dubina reke na tom mestu $H = 2\,m$. Indeks prelamanja vode iznosi $n = 1,33$.

REŠENJE:



Sa slike se vidi da je dužina senke stuba na površini reke:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h}{\mathrm{tg}\,\alpha} = 1,73\,m\ .$$

Na osnovu zakona prelamanja sledi:

$$\sin(90° - \alpha) = n \cdot \sin\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin\left[\frac{\sin(90° - \alpha)}{n}\right] = 40,63°$$

te je:

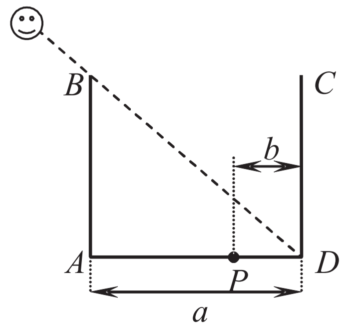
$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{y}{H} \quad \Rightarrow \quad y = H \cdot \mathrm{tg}\,\beta$$

i konačno:

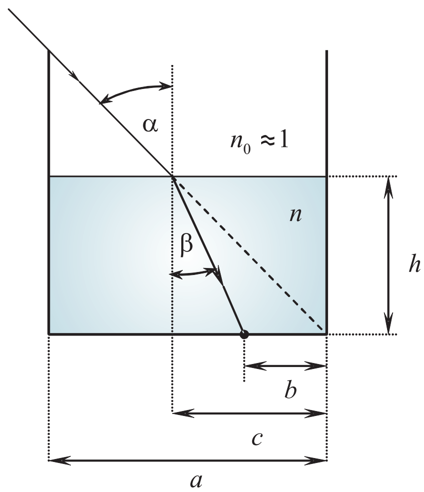
$$r = x + y = \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} + H \cdot \operatorname{tg}\beta = 3,45\,m\ ,$$

što predstavlja dužinu senke stuba na dnu reke.

4.2. Posuda u obliku kocke sa neprovidnim zidovima postavljena je tako da oko posmatrača ne vidi njeno dno, ali vidi stranu $\overline{CD}$. Kolika količina (zapremina) vode se mora usuti u sud da bi posmatrač mogao da vidi predmet P, koji se nalazi na rastojanju $b = 10\,cm$ od ugla D? Ivica suda je $a = 40\,cm$, dok je indeks prelamanja vode $n = 4/3$.



REŠENJE:



Na osnovu postavke zadatka jasno je da je $\alpha = 45°$. Polazeći od zakona prelamanja svetlosti na graničnoj površini vazduh/voda sledi:

$$\sin\alpha = n \cdot \sin\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) \approx 32°\ .$$

Sa slike se vidi da je:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{h} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad c = h\ ;$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{c-b}{h} = \frac{h-b}{h} = 1 - \frac{b}{h} \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{b}{1-\operatorname{tg}\beta} = 26,7\,cm\ .$$

Prema tome, imamo da je:

$$h = 26,7\,cm\ ,$$

te je tražena zapremina vode:

$$V = a^2 \cdot h = 0,043\,m^3\ .$$

4.3. Zrak svetlosti pada na planparalelnu staklenu pločicu debljine $d = 5\,cm$ i indeksa prelamanja $n = 1,5$ pod uglom $\alpha = 60°$. Odrediti rastojanje x za koje je zrak koji izlazi iz pločice pomeren u odnosu na upadni zrak.

REŠENJE:

Uvedimo oznake: $\overline{AB} = \ell$ i $\overline{BC} = x$, kao što je prikazano na slici Zakon prelamanja daje:

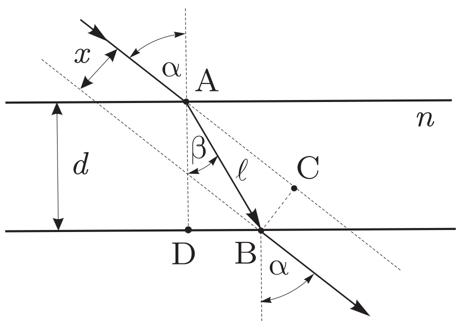
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\ ,$$

odnosno:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) = 35,26°\ . \tag{1}$$

Iz ΔADB vidi se da je:

$$\cos\beta = \frac{d}{\ell} \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{d}{\cos\beta}\ . \tag{2}$$



Konačno, iz ΔABC proizilazi veza:

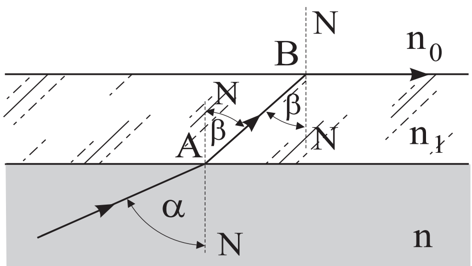
$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{x}{\ell} \ ,$$

odakle se, korišćenjem (1) i (2) za traženo rastojanje x dobija:

$$x = \frac{d \sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = 2,56 \, cm \ .$$

4.4. Na slobodnu površinu ulja indeksa prelamanja $n = 1,4$ naleže staklena planparalelna pločica kao što je prikazano na slici. Iznad pločice se nalazi vazduh ($n_0 = 1$). Pod kojim najmanjim upadnim uglom svetlosni zrak treba da padne na graničnu površinu ulje-staklo (dolazeći iz ulja) da bi se na graničnoj površini staklo-vazduh totalno reflektovao?

REŠENJE:



Za graničnu površinu ulje-staklo (tačka A na slici) zakon prelamanja glasi:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n} \ , \tag{1}$$

gde je n_1 indeks prelamanja stakla, dok za graničnu površinu staklo-vazduh (tačka B), važi:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{n_0}{n_1} \ , \tag{2}$$

pri čemu je n_0 indeks prelamanja vazduha, a γ prelomni ugao pod kojim svetlost ulazi u vazduh. Na osnovu relacija (1) i (2) proizilazi da povećanjem ugla α rastu i odgovarajući prelomni uglovi β i γ u staklu i vazduhu. Do totalne refleksije na graničnoj površini staklo-vazduh dolazi kada prelomni ugao γ postane prav ($\gamma = 90°$), odnosno:

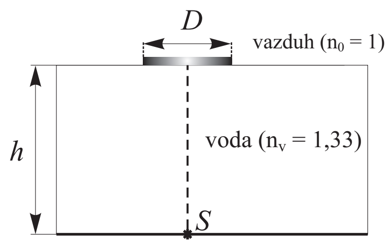
$$\sin \gamma = 1 \ . \tag{3}$$

Uvrštavajući izraze (2) i (3) u izraz (1) konačno se dobija:

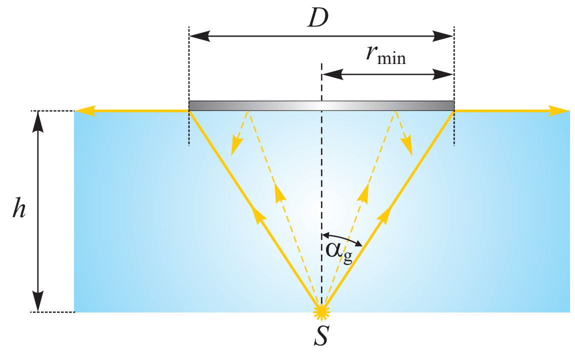
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{n_0}{n}\right) = 45,6^\circ \ ,$$

što predstavlja najmanju vrednost ugla α pri kojoj će na granici staklo-vazduh doći do totalne refleksije.

4.5. Na dnu suda napunjenog vodom ($n_v = 1,33$) do visine $h = 75\,cm$ nalazi se tačkasti svetlosni izvor S. Na površini vode pliva okrugli disk, tako da se njegov centar nalazi iznad izvora. Pri kojoj minimalnoj vrednosti prečnika diska D zraci koji polaze od izvora neće izlaziti iz vode?



REŠENJE:



Granični ugao totalne refleksije za graničnu površinu voda/vazduh određen je relacijom:

$$n_v \sin\alpha_g = n_0 \sin 90^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_g = \arcsin\left(\frac{1}{n_v}\right) = 48,75^\circ \ .$$

Sa slike se vidi da je:

$$\operatorname{tg}\alpha_g = \frac{r_{min}}{h} \quad \Rightarrow \quad r_{min} = h \cdot \operatorname{tg}\alpha_g = 0,75\,m \cdot \operatorname{tg}\alpha_g = 0,855\,m \ ,$$

te je:

$$D = 2 \cdot r_{min} = 1,71\,m\ .$$

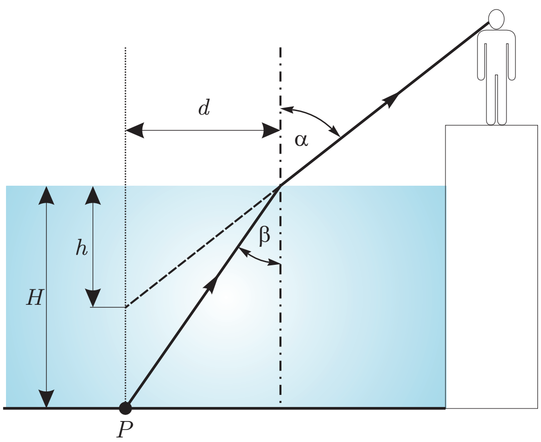
Zadaci za samostalni rad:

4.6. Ako sa nekog mesta iznad površine vode posmatramo predmet *P* koji se nalazi na dnu bazena dubokog $H = 2\,m$, izgleda nam bliži nego što zaista jeste. Odrediti koliko iznosi prividna dubina h na kojoj vidimo predmet:

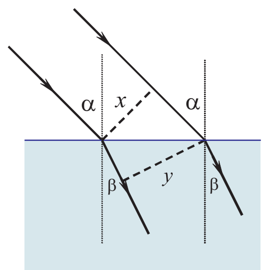
a) ako se nalazimo tačno iznad njega;

b) ako ga gledamo pod uglom $\alpha = 60°$ prema normali.

Indeks prelamanja vode iznosi $n = 1,33$.



4.7. Snop paralelnih svetlosnih zraka, širok $x = 3\,cm$, pada na ravnu debelu staklenu ploču pod uglom $\alpha = 45°$. Kolika je širina snopa u staklu (y), ako je indeks prelamanja stakla $n = 1,5$?



4.8. **Za koliko će biti pomerena slova ako ih čitamo kroz staklenu planparalelnu ploču debljine $d = 2\,cm$ i pri tome gledamo pod uglom $\alpha = 45°$ u odnosu na normalu? Indeks prelamanja stakla iznosi $n = 1,5$.**

4.9. **Dolazeći iz staklene planparalelne pločice indeksa prelamanja $n = 1,55$, svetlosni zrak pada na graničnu površinu staklo/vazduh pod uglom $\alpha = 50°$.**

- **a) da li će ovaj zrak izaći iz pločice?**
- **b) da li bi zrak izašao iz pločice kada bi se ona potopila u vodu $(n_v = 1,33)$?**

4.10. **Roneći pri dnu mora na dubini $6\,m$, ronilac gleda gore i vidi likove stena koje leže na dnu. Na kom minimalnom rastojanju od ronioca su stene čije likove vidi? Uzeti da je indeks prelamanja morske vode $n = 1,4$. (*Uputstvo*: Ronilac vidi likove stena zahvaljujući zracima koji se totalno reflektuju od granične površine voda/vazduh.)**

5. Apsorpcija elektromagnetnog zračenja

5.1. Povećanjem sloja vode na putu elektromagnetnih zraka za $2\,cm$ intenzitet zračenja se smanji tri puta. Naći koeficijent apsorpcije vode.

REŠENJE:
Polazeći od Lamberovog zakona:

$$I_t = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-kx} \ ,$$

imamo da je:

$$I_t^{(1)} = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-kx} \ ,$$

$$I_t^{(2)} = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-k(x+\Delta x)} = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-kx} \cdot \mathrm{e}^{-k\Delta x} = I_t^{(1)} \cdot \mathrm{e}^{-k\Delta x} \quad \Rightarrow ,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{I_t^{(2)}}{I_t^{(1)}} = \mathrm{e}^{-k\Delta x} \ ,$$

a pošto je na osnovu uslova zadatka $I_t^{(2)} = I_t^{(1)}/3$, sledi:

$$\frac{1}{3} = \mathrm{e}^{-k\Delta x} \quad \Rightarrow \quad \ln 3 = k \cdot \Delta x \ ,$$

i konačno:

$$k = \frac{\ln 3}{\Delta x} = 55,2\,m^{-1} \ .$$

5.2. Pred snop X-zraka postavlja se olovna folija debljine $0,5\,cm$ sa koeficijentom apsorpcije $k_{Pb} = 52,5\,cm^{-1}$. Kolika treba da bude debljina aluminijumske folije da bi efekat slabljenja bio isti, ako se zna da je koeficijent apsorpcije aluminijuma $k_{A\ell} = 0,765\,cm^{-1}$.

REŠENJE:
Za olovnu pločicu je:

$$I_{Pb} = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-k_{Pb} \cdot x_1} \ ,$$

a za aluminijumsku:

$$I_{A\ell} = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-k_{A\ell} \cdot x_2} \ .$$

Iz uslova zadatka: $I_{A\ell} = I_{Pb}$ sledi:

$$I_0 \cdot \mathrm{e}^{-k_{A\ell} \cdot x_2} = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-k_{Pb} \cdot x_1} \ ,$$

a odavde je:

$$k_{A\ell} \cdot x_2 = k_{Pb} \cdot x_1 \ ,$$

odnosno:

$$x_2 = \frac{k_{Pb}}{k_{A\ell}} \cdot x_1 = 0,343 \, m \ .$$

Zadaci za samostalni rad:

5.3. Sloj vode debljine $10,2\,cm$ smanjuje intenzitet $\gamma-$zraka, čija je energija $1MeV$, na polovinu od upadne vrednosti.

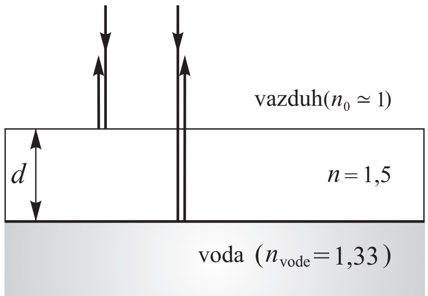
a) Odrediti koeficijent apsorpcije vode za $\gamma-$zrake date energije.

b) Izračunati koliki sloj olova je potreban da bi se intenzitet takvog zračenja sveo na polovinu, ako je koeficijent apsorpcije olova $k_{Pb} = 52,5\,cm^{-1}$.

6. Interferencija i difrakcija svetlosti

6.1. Zrak Sunčeve svetlosti $(380 - 760\,nm)$ pada pod pravim uglom na tanak sloj detrdženta debljine $d = 0,85\,\mu m$ i indeksa prelamanja $n = 1,5$ koji pliva na površini reke $(n_{vode} = 1,33)$. Koje boje će biti maksimalno pojačane u snopu reflektovane svetlosti iznad gornje površine sloja?

REŠENJE:



Optička razlika puteva zraka reflektovanih od gornje i donje granične površine sloja detrdženta iznosi:

$$\delta = 2nd - \frac{\lambda}{2} ,$$

jer zrak reflektovan od njegove gornje površine trpi skok u fazi. Uslov za maksimalno pojačanje ovih zraka pri interferenciji glasi:

$$\delta = k \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad 2nd - \frac{\lambda}{2} = k \cdot \lambda$$

odakle se konačno dobija:

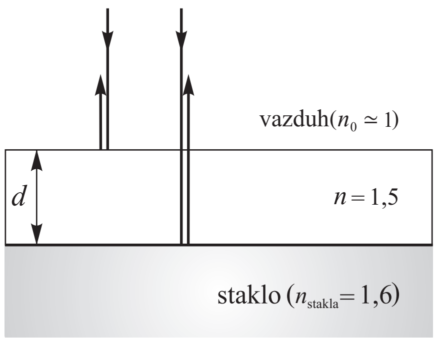
$$\lambda = \frac{4nd}{2k+1} \quad (k = 0, 1, 2, 3 \ldots) .$$

U snopu reflektovane svetlosti maksimalno će biti pojačane:

- crvena boja ($\lambda = 728,6\,nm$ za $k = 3$) ,
- zelena boja ($\lambda = 566,7\,nm$ za $k = 4$) ,
- plava boja ($\lambda = 463,6\,nm$ za $k = 5$) .
- ljubičasta boja ($\lambda = 392,3\,nm$ za $k = 6$) .

6.2. Prethodni zadatak rešiti pod pretpostavkom da je detrdžent nanesen sa gornje strane staklene posude ($n_{stakla} = 1,6$).

REŠENJE:



Optička razlika puteva zraka reflektovanih od gornje i donje granične površine sloja detrdženta u ovom slučaju iznosi:

$$\delta = 2nd + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = 2nd,$$

jer oba zraka pri refleksiji trpe skok u fazi. Primena uslova za njihovo maksimalno pojačanje pri interferenciji daje:

$$\delta = k \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad 2nd = k \cdot \lambda \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \, ,$$

odnosno:

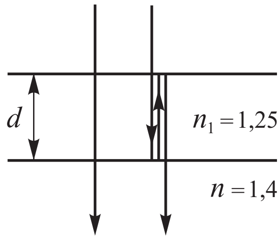
$$\lambda = \frac{2nd}{k} \, .$$

Uvrštavajući redom vrednosti za k, dobijamo da će maksimalno pojačane biti sledeće talasne dužine: $637,5\,nm$ (za $k = 4$), $510\,nm$ ($k = 5$) i $425\,nm$ ($k = 6$). Kojim bojama one odgovaraju?

6.3. Na površini morske vode, indeksa prelamanja $n = 1,4$, nalazi se mrlja od kerozina debljine $d = 270\,nm$ i indeksa prelamanja $n_1 = 1,25$. Svetlost koja pada vertikalno odozgo na mrlju delimično se propušta kroz nju, a delom se dvostruko reflektuje u sloju kerozina i zatim se propušta kroz vodu. Koja boja (talasna dužina iz opsega vidljive svetlosti) ima najveći intenzitet ako je posmatra ronilac koji se nalazi direktno ispod mrlje?

REŠENJE:

Optička razlika puteva svetlosnih zraka iznosi:



$$\delta = 2n_1 d + \frac{\lambda}{2},$$

jer se pri refleksiji drugog zraka od optički gušće sredine (vode) unosi fazni pomeraj od $\lambda/2$. Uzimajući u obzir uslov za maksimalno interferentno pojačanje svetlosnih zraka $\delta = k \cdot \lambda$ dobijamo:

$$2n_1 d + \frac{\lambda}{2} = k\,\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4n_1 d}{2k-1} \, .$$

Tražena talasna dužina dobija se za $k = 2$ i iznosi:

$$\lambda = 450\,nm.$$

6.4. Normalno na optičku rešetku koja ima 200 zareza po milimetru pada snop monohromatske svetlosti talasne dužine $650\,nm$. Odrediti ugao difrakcije koji odgovara maksimumu trećeg reda. Koliki je ukupan broj difrakcionih maksimuma koji će se javiti na zaklonu?

REŠENJE:

Položaji glavnih maksimuma pri difrakciji koherentnog snopa monohromatske svetlosti talasne dužine λ koja pada normalno na optičku rešetku određeni su jednačinom:

$$n\lambda = a \sin\theta_n = \frac{1}{N} \sin\theta_n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \, .$$

Odavde sledi da je:

$$\sin\theta_n = nN\lambda \quad \Rightarrow \quad \theta_n = \arcsin\,(nN\lambda) \, ,$$

odnosno, u našem slučaju ($n = 3$):

$$\theta_3 = \arcsin\Big(3 \cdot 2 \cdot 10^5\,m^{-1} \cdot 6,5 \cdot 10^{-7}\,m\Big) = \arcsin\,(0,39) \approx 23^\circ \, .$$

Maksimalni red difrakcije (n_{max}) određen je uslovom $\sin\theta_{n_{max}} = 1$, odakle sledi:

$$n_{max} N\lambda = 1 \quad \Rightarrow \quad n_{max} = \frac{1}{N\lambda} = \frac{1}{2 \cdot 10^5\,m^{-1} \cdot 6,5 \cdot 10^{-7}\,m} = 7,69 \mapsto 7 \, ,$$

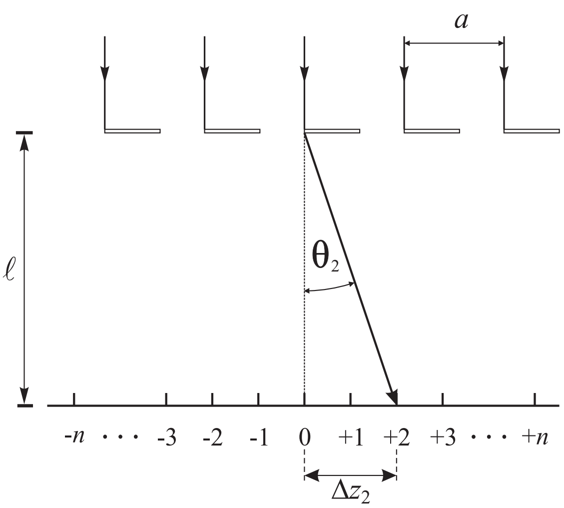
te je ukupan broj difrakcionih maksimuma koji javljaju na zaklonu:

$$m = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

(centralni maksimum nultog reda i po sedam sa svake njegove strane).

6.5. Difrakciona rešetka koja ima 75 zareza po milimetru osvetljava se monohromatskom svetlošću talasne dužine $500\,nm$. Pri tome se na zaklonu, koji se nalazi na rastojanju ℓ od rešetke, javljaju jednako udaljeni difrakcioni maksimumi. Ukoliko je poznato da rastojanje između centralnog i drugog difrakcionog maksimuma iznosi $\Delta z_2 = 11,25\,cm$, odrediti koliko iznosi ℓ.

REŠENJE:



Na osnovu jednačine difrakcije na optičkoj rešetki

$$n\lambda = a \sin\theta_n = \frac{1}{N}\sin\theta_n \ ,$$

koja se u ovom slučaju svodi na ($n = 2$):

$$2\lambda = \frac{1}{N}\sin\theta_2$$

i slike sa koje se vidi da je:

$$\sin\theta_2 = \frac{\Delta z_2}{\sqrt{(\Delta z_2)^2 + \ell^2}} \ ,$$

dobija se da je:

$$2N\lambda = \frac{\Delta z_2}{\sqrt{(\Delta z_2)^2 + \ell^2}}$$

i konačno:

$$\ell = \Delta z_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4N^2\lambda^2} - 1} \approx 1,5\,m\ .$$

Zadaci za samostalni rad:

6.6. Za podatke iz zadatka 6.3. odrediti koja će se boje maksimalno pojačati u snopu reflektovane svetlosti koju posmatra ribar iz čamca iznad mrlje, a ne ronilac koji se nalazi ispod nje.

6.7. Na ravnu opnu od sapunice, koja se nalazi u vazduhu, pada u pravcu normale snop bele svetlosti. Pri kojoj minimalnoj debljini opne će se u reflektovanoj svetlosti pojačati svetlost talasne dužine $\lambda = 550\,nm$? Da li se pri toj debljini opne u reflektovanoj svetlosti maksimalno pojačava svetlost još neke talasne dužine? Indeks prelamanja svetlosti za sapunicu je $n = 1,3$.

6.8. Optička rešetka ima 600 zareza po jednom milimetru. Odrediti ugao $\Delta\theta$ između dva difraktovana zraka prvog reda za svetlost talasnih dužina $\lambda_1 = 410\,nm$ i $\lambda_2 = 434\,nm$, kao i rastojanje Δz izmedu odgovarajućih difrakcionih maksimuma na zaklonu udaljenom $\ell = 50\,cm$ od rešetke.

6.9. Normalno na optičku rešetku koja ima 300 zareza po milimetru pada snop monohromatske svetlosti talasne dužine $\lambda = 550\,nm$. Odrediti ugao difrakcije koji odgovara maksimumu drugog reda. Koliki je ukupan broj difrakcionih maksimuma koji će se javiti na zaklonu?

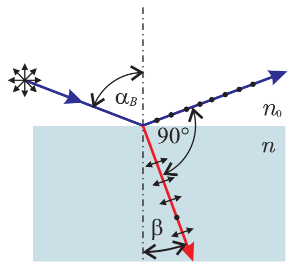
7. Polarizacija

7.1. Koliki je najpogodniji upadni ugao zraka nepolarizovane svetlosti na graničnu površinu vazduh/led da bi se izvršila maksimalna polarizacija reflektovanog zraka. Granični ugao totalne refleksije za ove dve sredine je $\alpha_g = 60°$.

REŠENJE:

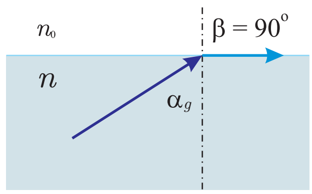
Prema Brusterovom zakonu je:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_{_B} = \frac{n}{n_0} = n\ .$$



Za totalnu refleksiju na graničnoj površini vazduh/led, pri čemu svetlosni zrak dolazi iz leda, važi zakon prelamanja:

$$n\ \sin\alpha_g = n_0\ \sin 90° \ \Rightarrow\ \sin\alpha_g = \frac{1}{n}\ .$$



Kombinacija prethodne dve jednačine daje:

$$\alpha_{_B} = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sin\alpha_g}\right) = 49,1°\ .$$

7.2. Najbolja polarizacija prelomljenog odnosno reflektovanog zraka svetlosti na graničnoj površini vazduh/staklo obrazuje se pri prelomnom uglu $\beta = 32°$. Koliki je indeks prelamanja stakla?

REŠENJE:

Indeks prelamanja stakla je, prema Brusterovom zakonu:

$$n = \mathrm{tg}\,\alpha_{_B}\ ,$$

dok je, na osnovu zakona prelamanja i činjenice da je $\alpha_{_B} + \beta = 90°$:

$$n_0\ \sin\alpha_{_B} = n\ \sin\beta \quad\Rightarrow\quad n = \frac{\sin(90° - \beta)}{\sin\beta} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \mathrm{ctg}\,\beta = 1,6\ .$$

7.3. U kojim granicama treba da se kreće veličina upadnog ugla na graničnu površinu vazduh/staklo, da bi se izvršila najbolja polarizacija svetlosti pri odbijanju odnosno prelamanju na ovoj graničnoj površini? Indeks prelamanja stakla nalazi se u granicama od $n_1 = 1,51$ do $n_2 = 1,90$.

REŠENJE:
Prema Brusterovom zakonu je:

$$n = \operatorname{tg} \alpha_B = \frac{\sin \alpha_B}{\cos \alpha_B} \ ,$$

odnosno:

$$n^2 = \frac{\sin^2 \alpha_B}{\cos^2 \alpha_B} = \frac{\sin^2 \alpha_B}{1 - \sin^2 \alpha_B} = \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 \alpha_B} - 1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sin^2 \alpha_B} - 1 = \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sin^2 \alpha_B} = \frac{1}{n^2} + 1 = \frac{1 + n^2}{n^2}$$

i konačno:

$$\sin \alpha_B = \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_B = \arcsin \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} \ .$$

Za $n_1 = 1,51$ je $\alpha_B^{(1)} = 56,5^\circ$, a za: $n_2 = 1,9$ je $\alpha_B^{(2)} = 62,24^\circ$. U tim granicama treba da se kreće upadni ugao.

7.4. Koji deo svetlosti prolazi kroz analizator ako je ugao između glavnih polarizacionih ravni analizatora i polarizatora $\theta = 30^\circ$, $\theta = 60^\circ$ i $\theta = 90^\circ$?

REŠENJE:
Prema Malusovom zakonu je:

$$I = I_0 \cos^2 \theta \ ,$$

gde je I_0 jačina svetlosti koja pada na analizator, I jačina koja prođe kroz njega, a θ ugao između ose polarizatora i analizatora. Kroz analizator ne prođe deo svetlosti:

$$\delta = \frac{I_0 - I}{I_0} = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \ ,$$

a prođe:

$$\sigma = 1 - \delta = \cos^2\theta \ .$$

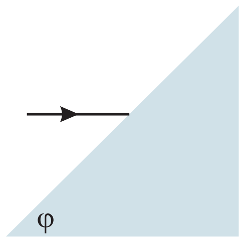
Za:

$$\begin{aligned} \theta = 30^\circ \quad &\Rightarrow \quad \sigma = 0,75 \ (75\%) \ , \\ \theta = 60^\circ \quad &\Rightarrow \quad \sigma = 0,25 \ (25\%) \ , \\ \theta = 90^\circ \quad &\Rightarrow \quad \sigma = 0 \ (0\%) \ . \end{aligned}$$

Zadaci za samostalni rad:

7.5. Pod kojim uglom prema horizontu treba da se nalazi Sunce da bi se reflektovani svetlosni zraci od slobodne površine vode najbolje polarizovali? Indeks prelamanja vode je $n = 1,33$.

7.6. Snop prirodne svetlosti pada na staklenu prizmu indeksa prelamanja $n = 1,6$. Odrediti ugao prizme φ, ako se zna da je reflektovana svetlost potpuno polarizovana.



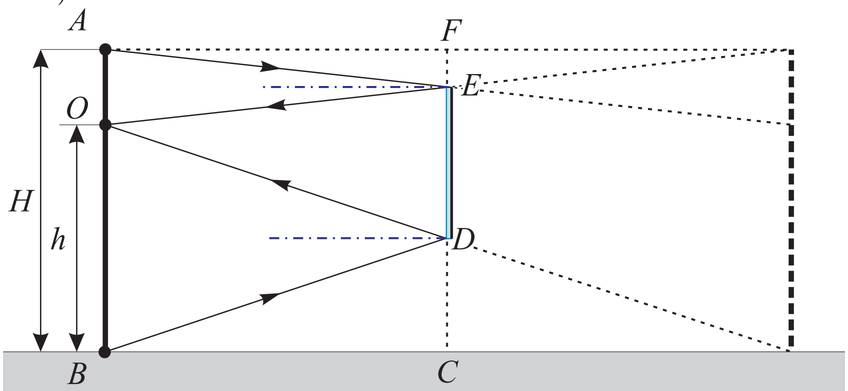
7.7. Intenzitet svetlosti koja dolazi iz polarizatora pri prolasku kroz analizator smanji se dva puta. Koliki je ugao između ravni polarizacije polarizatora i analizatora?

8. Ogledala

8.1. Koliku najmanju visinu treba da ima i na kojoj visini na zidu mora biti postavljeno ravno ogledalo, da bi čovek visok $H = 1,72\,m$ mogao u njemu da vidi ceo svoj lik? Čovekove oči nalaze se na visini $h = 1,60\,m$ od poda.

REŠENJE:

Visina ogledala i njegov položaj moraju da budu takvi da svetlosni zraci iz krajnjih tačaka A i B, posle refleksije od ogledala, stignu do čovekovih očiju (tačka O).



Na osnovu zakona odbijanja može se zaključiti da je:

$$\overline{CD} = \frac{\overline{OB}}{2} = \frac{h}{2} \quad \text{i} \quad \overline{EF} = \frac{\overline{OA}}{2} = \frac{H-h}{2}\ ,$$

a sa slike se vidi da je visina ogledala $\overline{DE}$:

$$\overline{DE} = H - \overline{CD} - \overline{EF} = H - \frac{h}{2} - \frac{H-h}{2} = \frac{H}{2} = \frac{1,72\,m}{2} = 0,86\,m.$$

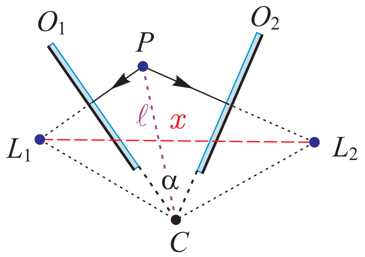
Gornja ivica ogledala treba da se nalazi na visini:

$$\overline{CE} = h + \overline{EF} = h + \frac{H-h}{2} = \frac{H+h}{2} = \frac{1,72\,m + 1,6\,m}{2} = 1,66\,m\ .$$

8.2. Mali predmet se nalazi između dva ravna ogledala postavljena pod uglom $\alpha = 30^{\circ}$, na rastojanju $\ell = 8\,cm$ od linije preseka ogledala. Na kom međusobnom rastojanju x se nalaze prvi imaginarni likovi ovog predmeta u ogledalima?

REŠENJE:

Imaginarni likovi L_1 i L_2 nalaze se na istoj udaljenosti od ogledala kao i predmet P.



To znači da je:

$$\overline{CL_1} = \ell \quad \text{i} \quad \overline{CL_2} = \ell\ ,$$

a takođe i da je ugao $\angle L_1 C L_2 = 2\,\alpha$. Na osnovu kosinusne teoreme je:

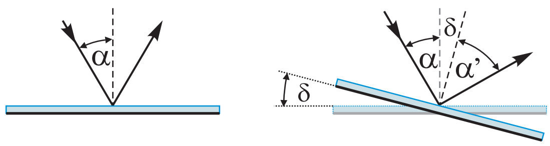
$$x^2 = \ell^2 + \ell^2 - 2\,\ell^2 \cos 2\,\alpha$$

i konačno:

$$x = \ell \sqrt{2\,(1 - \cos 2\,\alpha)} = 8\,cm\ .$$

8.3. Upadni i reflektovani zrak na ravnom ogledalu zaklapaju ugao od 60°. Za koliki ugao bi trebalo zarotirati ogledalo, da bi upadni i reflektovani zrak zaklapali ugao od: a) 90°; b) 40°?

REŠENJE:



a) Ako se ogledalo zarotira za ugao δ, i normala se zarotira za isti ugao tako da je $\alpha' = \alpha + \delta$. Pošto su upadni i odbojni ugao isti, sledi: $\alpha = 30^{\circ}$, te je: $2\,\alpha' = 90^{\circ} \;\Rightarrow\; \alpha' = 45^{\circ}$, odakle sledi:

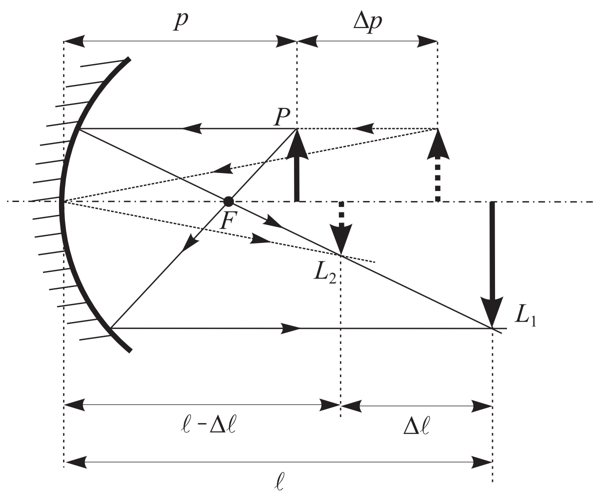
$$\delta = \alpha' - \alpha = 15^{\circ}\ ;$$

b) U ovom slučaju je ogledalo neophodno zarotirati na drugu stranu, čime se dobija da je $\alpha' = \alpha - \delta$. Pošto je sada $\alpha' = 20°$, sledi:

$$\delta = \alpha - \alpha' = 10° \ .$$

8.4. Svetao predmet nalazi se na rastojanju $p = 42,7\,cm$ od konkavnog ogledala ($p > f$). Ako se predmet udalji od ogledala za $\Delta p = 10\,cm$, rastojanje lika u odnosu na ogledalo promeni se za $\Delta\ell = 60\,cm$. Odrediti žižnu daljinu ogledala.

REŠENJE:



Za predmet koji se nalazi na rastojanju p od ogledala, važi relacija:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\ell} = \frac{1}{f} \ . \tag{1}$$

Kada se predmet udalji od ogledala za Δp, imamo da je:

$$\frac{1}{p + \Delta p} + \frac{1}{\ell - \Delta\ell} = \frac{1}{f} \ . \tag{2}$$

Kombinovanjem izraza (1) i (2) dobija se kvadratna jednačina po ℓ oblika::

$$\Delta p \cdot \ell^2 - \Delta p \Delta\ell \cdot \ell - p\,(p + \Delta p)\,\Delta\ell = 0 \ ,$$

čija su rešenja:

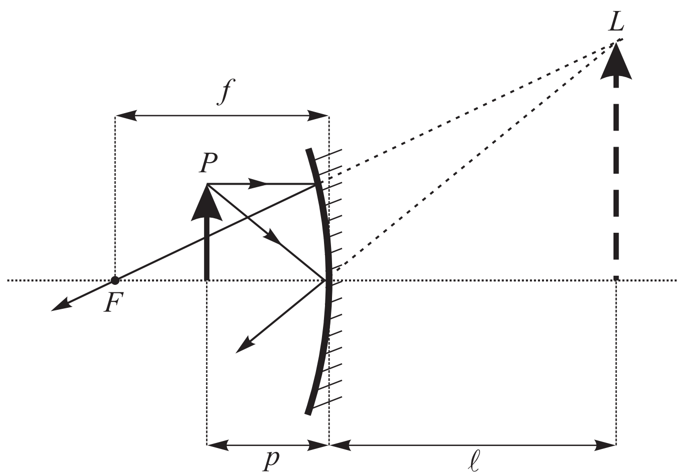
$$\ell^{(1,2)} = \frac{\Delta\ell}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4p\ (p+\Delta p)}{\Delta p\,\Delta\ell}}\right] \quad \Rightarrow \quad \ell = 150\,cm$$

(negativno rešenje odbacujemo, jer zbog uslova $p > f$ lik ne može biti imaginaran!) Sada je na osnovu (1):

$$f = \frac{p \cdot \ell}{p + \ell} = \frac{42,7\,cm \cdot 150\,cm}{42,7\,cm + 150\,cm} = 33,24\,cm\ .$$

8.5. Imaginarni lik predmeta koji se nalazi na optičkoj osi konkavnog ogledala uvećan je tri puta. Koliko iznosi rastojanje između predmeta i njegovog lika, ako je poluprečnik zakrivljenosti sferne površine ogledala $R = 90\,cm$?

REŠENJE:



Pošto je, prema uslovu zadatka, uvećanje ogledala:

$$u = \left|\frac{\ell}{p}\right| = 3$$

a lik je imaginaran, sledi: $\ell = -3\,p$. Zamena u jednačinu ogledala daje:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{3\,p} = \frac{2}{R}\ ,$$

a odavde je:

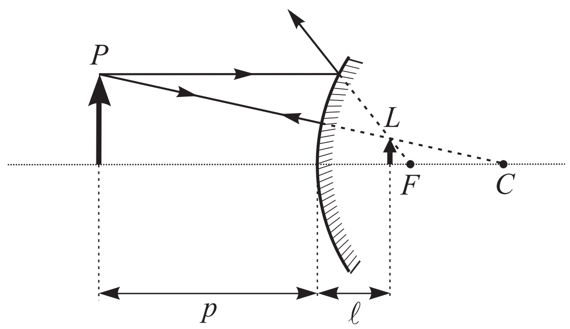
$$p = \frac{R}{3} = 30\,cm \qquad \text{i} \qquad \ell = -3\,p = -90\,cm\ .$$

Pošto se predmet i lik nalaze sa različitih strana ogledala, njihovo međusobno rastojanje je:

$$d = p + |\ell| = 120\,cm\ .$$

8.6. Na kom rastojanju od temena konveksnog ogledala poluprečnika zakrivljenosti $R = 40\,cm$ treba da se nalazi predmet P, da bi njegov lik u ogledalu bio dva puta manji?

REŠENJE:



Polazeći od jednačine konveksnog ogledala:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{\ell} = -\frac{2}{R}$$

i definicije uvećanja, na osnovu koje sledi:

$$u = \frac{L}{P} = \frac{|\ell|}{p} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |\ell| = \frac{p}{2}\ ,$$

dobija se da je:

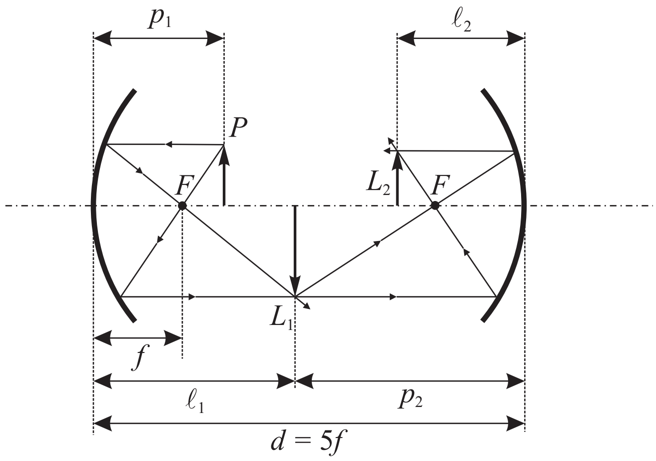
$$p = \frac{R}{2} = 20\,cm\ .$$

8.7. Dva jednaka konkavna sferna ogledala žižnih daljina $f = 30\,cm$ postavljena su jedno naspram drugog na rastojanju $d = 5\,f$, tako da im se optičke ose poklapaju. Na rastojanju $p_1 = 50\,cm$ od jednog ogledala nalazi se svetao predmet veličine $P = 2\,cm$.

a) **Odrediti gde se nalazi konačni lik predmeta, ako je poznato da njega formiraju svetlosni zraci koji se odbijaju najpre od bližeg, a potom od daljeg ogledala.**

b) **Kolika je veličina ovog lika?**

REŠENJE:



a) Položaji likova L_1 i L_2 određeni su jednačinama:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{\ell_1} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \ell_1 = \frac{p_1 \cdot f}{p_1 - f} = 75\,cm \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{p_2} + \frac{1}{\ell_2} = \frac{1}{f} \ .$$

Sa slike se vidi da je $p_2 = d - \ell_1 = 5f - \ell_1$, tako da dobijamo:

$$\ell_2 = \frac{p_2 \cdot f}{p_2 - f} = \frac{(5f - \ell_1)\ f}{4f - \ell_1} = 50\,cm \ .$$

b) Uvećanja prvog i drugog ogledala su:

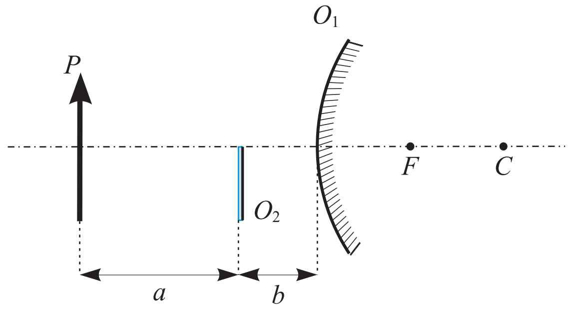
$$u_1 = \frac{L_1}{P} = \frac{\ell_1}{p_1} \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{\ell_1}{p_1}\,P \ ,$$

$$u_2 = \frac{L_2}{L_1} = \frac{\ell_2}{p_2} = \frac{\ell_2}{5f - \ell_1} \ ,$$

na osnovu čega proizilazi:

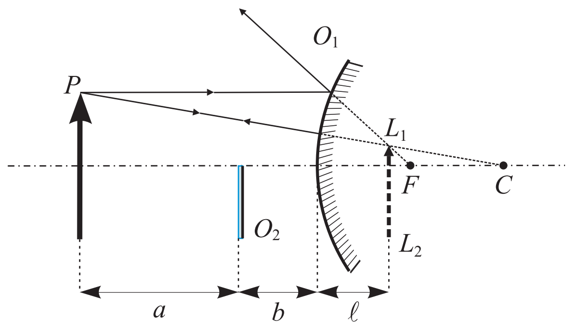
$$L_2 = \frac{\ell_2}{5f - \ell_1}\,L_1 = \frac{\ell_2}{5f - \ell_1}\,\frac{\ell_1}{p_1}\,P = 2\,cm \ .$$

8.8. Za određivanje žižne daljine konveksnog sfernog ogledala O_1 koristi se eksperiment prikazan na slici. Ravno ogledalo O_2 pomera se duž ose sfernog ogledala sve dok se likovi predmeta P u oba ogledala ne poklope, pri čemu su rastojanja $a = 30\,cm$ i $b = 10\,cm$. Kolika je žižna daljina sfernog ogledala?



REŠENJE:

Konstrukcija likova L_1 pomoću konveksnog i L_2 pomoću ravnog ogledala prikazana je na slici.



Polazeći od jednačine konveksnog ogledala:

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\ell} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{p \cdot \ell}{p - \ell}$$

i slike, sa koje se vidi da je:

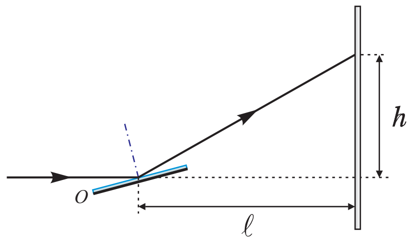
$$p = a + b \qquad \text{i} \qquad a = b + \ell \quad \Rightarrow \quad \ell = a - b\,,$$

dobija se:

$$f = \frac{(a+b)\,(a-b)}{a+b-(a-b)} = \frac{a^2 - b^2}{2b} = 40\,cm\,.$$

Zadaci za samostalni rad:

8.9. Horizontalni zrak svetlosti pada na vertikalni ekran. Ako se na put zraka postavi ravno ogledalce, udaljeno od ekrana za $\ell = 0,5\,m$, svetla tačka na ekranu pomeri se za $h = 3,5\,cm$. Pod kojim uglom pada zrak na ogledalce?



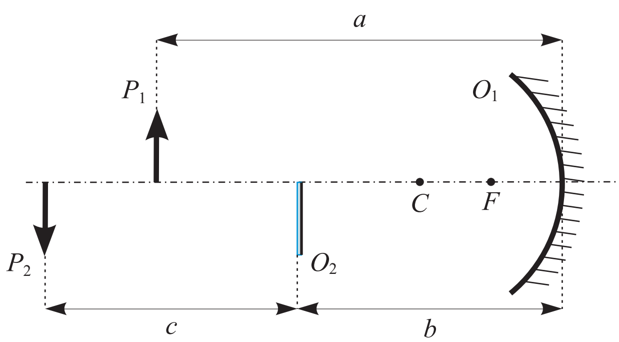
8.10. Svetao predmet nalazi se na rastojanju $p = 3R$ od temena konkavnog sfernog ogledala poluprečnika krivine R. Za koliko puta će se povećati veličina lika predmeta u ogledalu ako se njegov poluprečnik krivine poveća dva puta?

8.11. Predmet veličine $P = 3\,mm$ postavljen je na udaljenosti $p = f/4$ od temena sfernog ogledala. Kolika će da bude veličina lika ovog predmeta ako je ogledalo konkavno, a kolika ako je konveksno?

8.12. Konkavno sferno ogledalo poluprečnika zakrivljenosti $R_1 = 20\,cm$ i konveksno ogledalo poluprečnika krivine $R_2 = -30\,cm$ nalaze se na međusobnom rastojanju $d = 40\,cm$ tako da im se optičke ose poklapaju. Svetao predmet veličine $P = 5\,cm$ postavljen je na rastojanje $p_1 = 15\,cm$ od temena konkavnog ogledala. Odrediti položaj, veličinu i prirodu konačnog lika koji grade zraci kada se odbiju najpre od konkavnog, a zatim od konveksnog ogledala.

8.13. Za određivanje žižne daljine konkavnog sfernog ogledala O_1 koristi se eksperiment prikazan na slici. Ispred ogledala O_1 postave se dva predmeta P_1 i P_2 i ravno ogledalo O_2. Ravno

ogledalo i predmet P_2 pomeraju se duž ose sfernog ogledala sve dok se likovi predmeta P_1 i P_2 u oba ogledala ne poklope, pri čemu su rastojanja $a = 30\,cm$ i $b = 25\,cm$ i $c = 6\,cm$. Kolika je žižna daljina sfernog ogledala?



9. Sočiva

9.1. Kolika je žižna daljina bikonveksnog sočiva načinjenog od stakla indeksa prelamanja $n_2 = 1,61$, ako su poluprečnici zakrivljenosti njegovih sfernih površina $R_1 = 15\,cm$ i $R_2 = 20\,cm$? Sočivo se nalazi:

a) u vazduhu;

b) u vodi ($n_1 = 1,33$).

Koliko bi iznosile ove vrednosti ukoliko bi sočivo bilo plankonveksno poluprečnika zakrivljenosti $R_2 \equiv R = 20\,cm$?

REŠENJE:

S obzirom na jednačinu za optičku moć (ili optičku jačinu) sfernih sočiva u obliku:

$$j\,[D] = \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) ,$$

imamo da je:

a) u vazduhu ($n_1 = 1$):

$$\frac{1}{f} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \Rightarrow \quad f = \frac{R_1\,R_2}{(n_2 - 1)\,(R_1 + R_2)} = 14,1\,cm \;;$$

b) u vodi ($n_1 = 1,33$):

$$f = \frac{R_1\,R_2}{\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\,(R_1 + R_2)} = 40,7\,cm \;;$$

Za plankonveksno sočivo $R_1 \to \infty$ i $R_2 \equiv R$, te je žižna daljina ovakvog sočiva u vazduhu:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - 1}{R} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{R}{n_2 - 1} = 32,8\,cm \;,$$

a u vodi:

$$f = \frac{R}{\frac{n_2}{n_1} - 1} = 95\,cm$$

9.2. U prozorskoj staklenoj ploči ostao je prilikom izrade prostor ispunjen vazduhom oblika bikonveksnog sočiva, čije granične površine imaju jednake poluprečnike krivina $R = 2\,mm$. Koliko iznosi žižna daljina ovog „sočiva", ako je indeks prelamanja stakla $n = 1,52$?

REŠENJE:

Ponovo polazimo od jednačine:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) ,$$

ali je u ovom slučaju $n_2 = 1$, $n_1 \equiv n$ i $R_1 = R_2 \equiv R$:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{1}{n} - 1\right)\frac{2}{R} ,$$

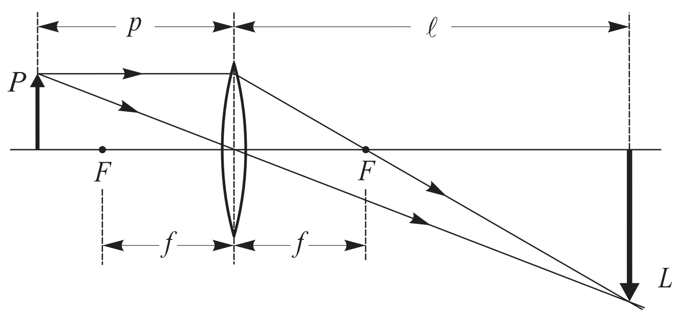
te je tražena žižna daljina:

$$f = \frac{R}{2\left(\frac{1}{n} - 1\right)} = \frac{2\,mm}{2\left(\frac{1}{1{,}52} - 1\right)} \approx -3\,mm ,$$

što znači da se opisani vazdušni prostor ponaša kao rasipno sočivo.

9.3. Pomoću simetričnog sabirnog sočiva čiji je poluprečnik krivine $R = 30\,cm$ dobija se realan lik nekog predmeta uvećan pet puta. Sočivo se nalazi u vazduhu, a načinjeno je od materijala čiji je indeks prelamanja $n = 1,50$. Odrediti rastojanje predmeta i lika u odnosu na sočivo.

REŠENJE:



Polazeći od jednačine sabirnog sočiva u obliku:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{\ell}=\frac{n-n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=(n-1)\frac{2}{R}\ ,$$

jer je $R_1=R_2\equiv R$ (simetrično sočivo) i $n_1=1$ i uzimajući u obzir da je:

$$u=\frac{\ell}{p}=5\ ,$$

dobija se:

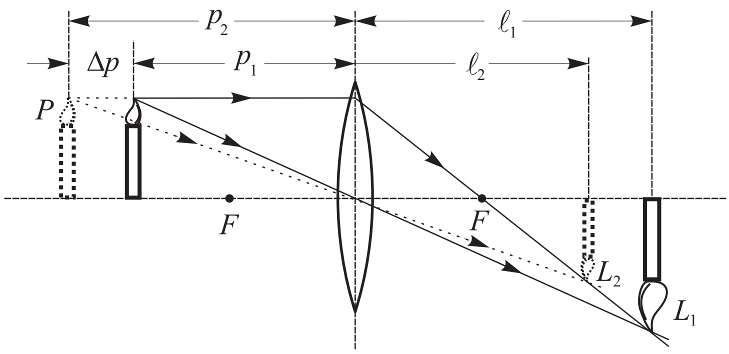
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{5p}=(n-1)\frac{2}{R}\quad\Rightarrow\quad\frac{6}{5p}=\frac{2(n-1)}{R}$$

i konačno:

$$p=\frac{3R}{5(n-1)}=36\,cm,\quad \ell=5p=180\,cm\ .$$

9.4. Visina plamena sveće iznosi $5\,cm$. Sočivo, čiji je položaj fiksiran, pokazuje na zaklonu njegov lik visine $15\,cm$. Sveća se potom udalji za $\Delta p=1,5\,cm$ od sočiva i pomeranjem zaklona ponovo se dobije oštar lik plamena visine $10\,cm$. Odrediti žižnu daljinu sočiva.

REŠENJE:



Prema uslovu zadatka je:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{\ell_1}=\frac{1}{p_2}+\frac{1}{\ell_2}\ ,$$

pri čemu je:

$$p_2 = p_1 + \Delta p \ ,$$

i

$$u_1 = \frac{L_1}{P} = \frac{\ell_1}{p_1} = 3 \quad \Rightarrow \quad \ell_1 = 3p_1 \ ,$$

$$u_2 = \frac{L_2}{P} = \frac{\ell_2}{p_2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \ell_2 = 2p_2 = 2(p_1 + \Delta p) \ .$$

Dakle:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{3p_1} = \frac{1}{p_1 + \Delta p} + \frac{1}{2(p_1 + \Delta p)} \ ,$$

odnosno:

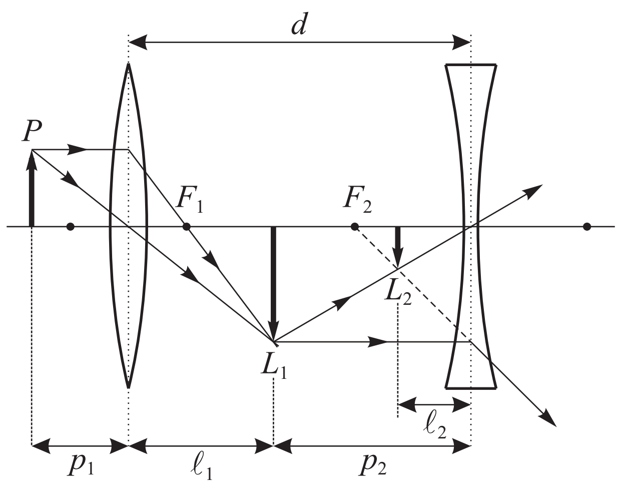
$$p_1 = 8\Delta p = 12\,cm \quad \text{i} \quad \ell_1 = 3p_1 = 36\,cm \ ,$$

na osnovu čega konačno proizilazi:

$$f = \frac{p_1 \cdot \ell_1}{p_1 + \ell_1} = 9\,cm \ .$$

9.5. Dva tanka sočiva čije se optičke ose poklapaju međusobno su udaljena $d = 120\,cm$. Žižne daljine sočiva su $f_1 = 20\,cm$ i $f_2 = -40\,cm$. Predmet se nalazi na optičkoj osi na rastojanju $p_1 = 30\,cm$ ispred prvog (sabirnog) sočiva. Odrediti položaj krajnjeg lika.

REŠENJE:



Pomoću jednačine sabirnog sočiva određujemo položaj lika L_1:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{\ell_1} \quad \Rightarrow \quad \ell_1 = \frac{p_1\, f_1}{p_1 - f_1} = 60\, cm \ .$$

Budući da je realan, ovaj lik predstavlja predmet za rasipno sočivo. Na osnovu jednačine rasipnog sočiva dobija se da je:

$$-\frac{1}{|f_2|} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{|\ell_2|} \ ,$$

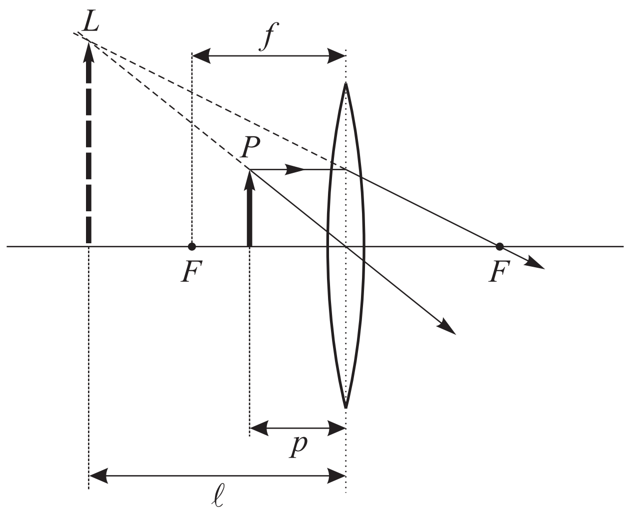
pri čemu je $p_2 = d - \ell_1$. Odavde sledi da je:

$$|\ell_2| = \frac{(d - \ell_1) \cdot |f_2|}{d - \ell_1 + |f_2|} = 24\, cm \ .$$

Prema tome, krajnji lik datog predmeta L_2 nalazi se na rastojanju $\ell_2 = 24\, cm$ ispred rasipnog sočiva

9.6. Simetrično bikonveksno sočivo poluprečnika zakrivljenosti $R = 5\, cm$ ima uvećanje $u = 6$ kada se koristi kao lupa. Odrediti indeks prelamanja materijala od koga je ovo sočivo napravljeno, uzimajući u obzir da se lik predmeta formira na daljini jasnog vida $\ell \equiv s = 25\, cm$.

REŠENJE:



Jednačina simetričnog bikonveksnog sočiva koje se nalazi u vazduhu glasi:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\,\frac{2}{R} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{R}{2\,f} + 1\,, \tag{1}$$

a kada se ovo sočivo koristi kao lupa, važi:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{|\ell|} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{f\,|\ell|}{f + |\ell|}\,. \tag{2}$$

Uvećanje lupe iznosi:

$$u = \frac{L}{P} = \frac{|\ell|}{p}\,,$$

odnosno, s obzirom na jednačinu (2):

$$u = \frac{f + |\ell|}{f} = 1 + \frac{|\ell|}{f}\,.$$

Odavde je:

$$f = \frac{|\ell|}{u-1}\,,$$

te se – uzimajući da je $|\ell| \equiv s$ – iz jednačine (1) konačno dobija:

$$n = \frac{R\,(u-1)}{2\,s} + 1 = 1{,}5\,.$$

9.7. Lik predmeta koji daje tanko rasipno sočivo umanjen je dva puta. Ako se predmet odmakne od sočiva za $\Delta p = 50\,cm$, lik će biti umanjen tri puta u odnosu na predmet. Odrediti žižnu daljinu ovog sočiva.

REŠENJE:

U prvom slučaju je:

$$u_1 = \frac{L_1}{P} = \frac{|\ell_1|}{p} = \frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad -\frac{1}{|f|} = \frac{1}{p} - \frac{1}{|\ell_1|} = -\frac{1}{p}\,,$$

a u drugom:

$$u_2 = \frac{L_2}{P} = \frac{|\ell_2|}{p + \Delta p} = \frac{1}{3} \qquad \text{i} \qquad -\frac{1}{|f|} = \frac{1}{p + \Delta p} - \frac{1}{|\ell_2|} = -\frac{2}{p + \Delta p}\,.$$

Izjednačavanjem gornjih relacija dobija se:

$$-\frac{1}{p} = -\frac{2}{p+\Delta p} \quad \Rightarrow \quad p = \Delta p = 50\,cm \quad \text{i} \quad f = -p = -50\,cm \ .$$

9.8. Dva simetrična bikonveksna sočiva nalaze se u vazduhu. Prvo sočivo ima žižnu daljinu $f_1 = 10\,cm$ i indeks prelamanja $n_1 = 1,44$, a drugo sočivo je žižne daljine $f_2 = 20\,cm$ i indeksa prelamanja $n_2 = 1,54$. Ako se sočiva postave u tečnost indeksa prelamanja n', odrediti:

a) kolika mora biti vrednost indeksa prelamanja n' da bi u posmatranoj tečnosti oba sočiva imala istu žižnu daljinu f';

b) kolika je vrednost žižne daljine f'.

REŠENJE:

a) Kada se sočiva nalaze u vazduhu, važe jednačine:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f_1} &= (n_1-1)\,\frac{2}{R_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{R_1} = \frac{1}{f_1\,(n_1-1)}\ ,\\ \frac{1}{f_2} &= (n_2-1)\,\frac{2}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{R_2} = \frac{1}{f_2\,(n_2-1)}\ ,\end{aligned}$$

dok je u slučaju kada se sočiva nalaze u tečnosti indeksa prelamanja n':

$$\begin{aligned}\frac{1}{f_1'} &= \frac{n_1-n'}{n'}\,\frac{2}{R_1}\ ,\\ \frac{1}{f_2'} &= \frac{n_2-n'}{n'}\,\frac{2}{R_2}\ .\end{aligned}$$

Prema uslovu zadatka je $f_1' = f_2'$, na osnovu čega sledi:

$$\frac{n_1-n'}{n'}\,\frac{2}{R_1} = \frac{n_2-n'}{n'}\,\frac{2}{R_2}\ ,$$

odnosno:

$$\frac{n_1-n'}{n'}\,\frac{1}{f_1\,(n_1-1)} = \frac{n_2-n'}{n'}\,\frac{1}{f_2\,(n_2-1)}$$

i konačno:

$$n' = \frac{\frac{n_1}{f_1\,(n_1-1)} - \frac{n_2}{f_2\,(n_2-1)}}{\frac{1}{f_1\,(n_1-1)} - \frac{1}{f_2\,(n_2-1)}} = 1,371 \; .$$

b) Polazeći od relacija:

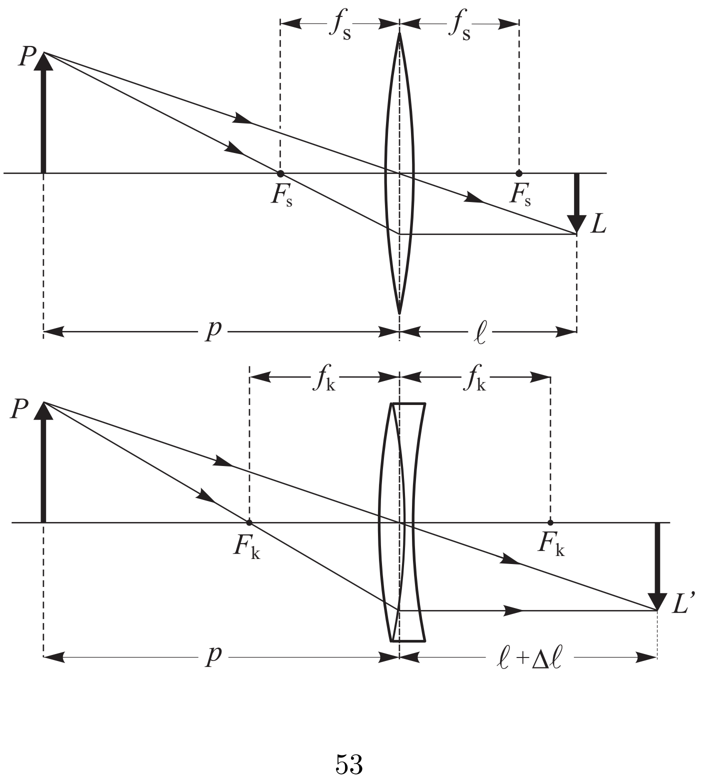
$$\frac{1}{f'} = \frac{n_1 - n'}{n'}\,\frac{1}{f_1\;(n_1-1)} = \frac{n_2 - n'}{n'}\,\frac{1}{f_2\;(n_2-1)}$$

dobija se da je:

$$f' = \frac{n' f_1\,(n_1-1)}{n_1 - n'} = \frac{n' f_2\,(n_2-1)}{n_2 - n'} = 87,5\,cm \; .$$

9.9. Sabirno sočivo žižne daljine f_s daje realan lik nekog predmeta na rastojanju $\ell = 25\,cm$ od svog optičkog centra. Kada se neposredno uz njega postavi jedno rasipno sočivo i napravi kombinacija sočiva, rastojanje lika poveća se za $\Delta\ell = 15\,cm$. Odrediti žižnu daljinu rasipnog sočiva.

REŠENJE:



Jednačina sabirnog sočiva je:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\ell} = \frac{1}{f_s} ,$$

a kombinovanog:

$$\frac{1}{f_k} = \frac{1}{f_s} + \frac{1}{f_r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\ell + \Delta\ell} .$$

Na osnovu ovih relacija proizilazi:

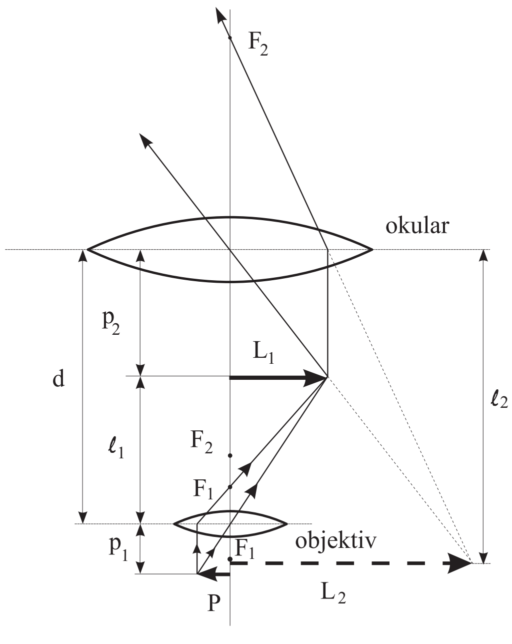
$$\frac{1}{f_r} = -\frac{\Delta\ell}{\ell(\ell + \Delta\ell)}$$

i konačno:

$$f_r = -\frac{\ell(\ell + \Delta\ell)}{\Delta\ell} = -66,7\,cm .$$

9.10. Objektiv mikroskopa ima optičku moć $j_1 = 40$ dioptrija, a okular $j_2 = 20$ dioptrija. Ispod objektiva nalazi se osvetljeni predmet (preparat) veličine $P = 0,02\,mm$ na rastojanju $p_1 = 2,8\,cm$ od optičkog centra objektiva. Konačan lik koji daje mikroskop formira se na daljini jasnog vida $s = \ell_2 = 25\,cm$ od okulara. Konstruisati konačni lik i odrediti ukupno uvećanje mikroskopa, kao i veličinu L_2 konačnog lika.

REŠENJE:



Konstrukcija konačnog lika je prikazana na slici. Žižna daljina objektiva iznosi:

$$f_1 = \frac{1}{j_1} = \frac{1}{40}\, m = 0,025\, m \ ,$$

a okulara:

$$f_2 = \frac{1}{j_2} = \frac{1}{20}\, m = 0,05\, m \ .$$

Na osnovu jednačine:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{\ell_1} \, ,$$

udaljenost lika L_1 koji formira objektiv imaće vrednost:

$$\ell_1 = \frac{p_1 \cdot f_1}{p_1 - f_1} = \frac{2,8 \cdot 2,5}{2,8 - 2,5}\, cm = 23,3\, cm \ .$$

Lik L_1 igra ulogu predmeta za okular koji deluje kao lupa, tako da na osnovu jednačine:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{\ell_2}$$

i uslova zadatka $\ell_2 = s$, sledi:

$$p_2 = \frac{f_2 \cdot s}{f_2 + s} = \frac{5 \cdot 25}{5 + 25}\, cm = 4,17\, cm \ .$$

Prema tome, ukupno uvećanje mikroskopa može se odrediti kao:

$$u = u_1 \cdot u_2 = \frac{\ell_1}{p_1} \cdot \frac{s}{p_2} = 49,9 \simeq 50 \ .$$

Kako je uvećanje određeno i relacijom:

$$u = \frac{L_1}{P} \cdot \frac{L_2}{L_1} = \frac{L_2}{P} \ ,$$

veličina konačnog lika biće:

$$L_2 = u \cdot P = 50 \cdot 0,02\, mm = 1\, mm \ .$$

9.11. Mikroskop ima objektiv žižne daljine $f_1 = 1\,cm$, a okular žižne daljine $f_2 = 3\,cm$. Razmak između objektiva i okulara je $d = 20\,cm$. Na kojoj udaljenosti od objektiva treba postaviti predmet da bi ga, gledajući kroz okular, videli na udaljenosti $\ell_2 = 22\,cm$? Koliko je linearno uvećanje mikroskopa?

REŠENJE:

Lik koji daje objektiv je predmet za okular i od njega je udaljen za p_2 (pogledati sliku u prethodnom zadatku). Pošto je po uslovu zadatka lik koji daje okular udaljen od njegovog optičkog centra za $\ell_2 = 22\,cm$, sledi:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{\ell_2} \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{f_2 \cdot \ell_2}{f_2 + \ell_2} = \frac{3 \cdot 22}{3 + 22}\,cm = 2,64\,cm\,.$$

Lik koji daje objektiv mora biti udaljen od objektiva za:

$$\ell_1 = d - p_2 = (20 - 2,64)\,cm = 17,36\,cm\ .$$

Iz jednačine:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{\ell_1}\,,$$

sledi da je:

$$p_1 = \frac{f_1 \cdot \ell_1}{\ell_1 - f_1} = 1,06\,cm\,.$$

Linearno uvećanje mikroskopa iznosi:

$$u = u_1 \cdot u_2 = \frac{\ell_1}{p_1} \cdot \frac{\ell_2}{p_2} = 136,5\ .$$

Zadaci za samostalni rad:

9.12. Tankim plankonveksnim sočivom poluprečnika krivine $R = 50\,cm$ dobija se realan lik koji je tri puta veći od predmeta. Odrediti rastojanja predmeta i lika od ovog sočiva, ako je indeks prelamanja materijala od kojeg je ono načinjeno $n = 1,50$. Koliko bi iznosila ova rastojanja ako bi lik bio imaginaran?

9.13. Sabirno sočivo žižne daljine $f_s = 10\,cm$ i rasipno sočivo nepoznate žižne daljine postavljeni su na međusobnom rastojanju $d = 50\,cm$ tako da im se optičke ose poklapaju. Na udaljenosti $p_1 = 15\,cm$ ispred sabirnog sočiva nalazi se osvetljeni predmet veličine P. Odrediti žižnu daljinu rasipnog sočiva ako je poznato da je konačni lik ovog predmeta umanjen dva puta.

9.14. **Bikonveksno sočivo daje realni lik posmatranog predmeta sa uvećanjem $1,5$. Ako se sočivo pomeri za $12\,cm$ duž svoje glavne ose, dobija se imaginarni lik istog predmeta sa uvećanjem $1,5$. Kolika je žižna daljina ovog sočiva?**

9.15. **Odrediti položaj, veličinu i prirodu lika koji nastaje kada se osvetljeni predmet visine $P = 5\,mm$ postavi na rastojanje $p = 14\,cm$ od centra bikonveksnog sočiva. Sočivo je simetrično $(R_1 = R_2 \equiv R = 20\,cm)$, napravljeno je od stakla indeksa prelamanja $n = 1,625$, a nalazi se u vodi čiji je indeks prelamanja $n_v = 1,33$.**

9.16. **Predmet koji je udaljen $10\,cm$ od centra tankog simetričnog sabirnog sočiva daje na zaklonu lik veličine $4,5\,cm$. Kada se isti predmet pomeri na rastojanje $8\,cm$ od ovog sočiva, veličina lika iznosi $9\,cm$. Odrediti:**

a) žižnu daljinu sočiva;

b) veličinu predmeta.

10. Fizika ljudskog oka

10.1. Mrežnjača u ljudskom oku se nalazi na rastojanju $24\,mm$ od očnog sočiva. Oko se fokusira na predmet udaljen $2\,m$ i visine $40\,cm$. Odrediti žižnu daljinu očnog sočiva, kao i veličinu lika u mrežnjači.

REŠENJE:

Polazeći od jednačine:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\ell}$$

i uzimajući da je $p = 200\,cm$, $\ell = 2,4\,cm$ (lik se stvara u mrežnjači), sledi:

$$f = \frac{p \cdot \ell}{p + \ell} = 2,37\,cm\ .$$

Kao što se vidi, žižna daljina očnog sočiva je veoma bliska rastojanju lika ℓ, a to je posledica mnogo većeg rastojanja predmeta ($p \gg \ell$). Zbog toga i relativno velike promene veličine p ne zahtevaju znatnu promenu žižne daljine.
Veličinu lika u mrežnjači odredićemo polazeći od definicije uvećanja:

$$u = \frac{L}{P} = \frac{\ell}{p} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\ell}{p}\,P = \frac{2,4\,cm}{200\,cm}\,40\,cm = 0,48\,cm = 4,8\,mm\ .$$

10.2. Kolika je akomodacija (izražena u dioptrijama) neophodna, da bi normalno oko dobro videlo i daleke i bliske predmete? Daljina jasnog vida iznosi $s = 25\,cm$.

REŠENJE:

Daljnja tačka akomodacije je beskonačno udaljena, te je:

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\ell} = j_{\,daleko}\ ,$$

gde je $\ell-$ rastojanje lika koji se formira u mrežnjači od očnog sočiva, dok je za blisku tačku:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{\ell} = j_{\,blisko}\ .$$

Prema tome, akomodacija oka jednaka je:

$$\Delta j = j_{blisko} - j_{daleko} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell} = \frac{1}{s} = \frac{1}{25 \cdot 10^{-2} m} = 4\,D\,.$$

10.3. Koliki su žižna daljina i optička moć sočiva naočara za otklanjanje dalekovidosti čoveka čija je daljina jasnog vida $50\,cm$?

REŠENJE:

Kada dalekovid čovek ne nosi naočare, a predmet se nalazi na rastojanju $p_1 \equiv s_1 = 50\,cm$ od očnog sočiva, lik predmeta formira se na žutoj mrlji unutar mrežnjače oka, tj. na rastojanju ℓ od očnog sočiva. Tada je:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{\ell} = \frac{1}{f_o} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\ell} = \frac{1}{f_o} - \frac{1}{p_1}\,,$$

gde je f_o – žižna daljina očnog sočiva. Ako se predmet nalazi na rastojanju manjem od $50\,cm$, njegov lik se formira iza žute mrlje i čovek ga ne vidi jasno. Sa naočarima se postiže da lik ponovo pada na žutu mrlju kada se predmet nalazi na daljini jasnog vida normalnog ljudskog oka $p \equiv s = 25\,cm$. U tom slučaju je:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\ell} = \frac{1}{f_o} + \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\ell} = \frac{1}{f_o} + \frac{1}{f} - \frac{1}{p}\,,$$

gde je f – žižna daljina sočiva naočara. Izjednačavanjem desnih strana prethodnih relacija dobija se:

$$\frac{1}{f_o} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f_o} + \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}$$

i konačno:

$$f = \frac{p\,p_1}{p_1 - p} = 50\,cm\,, \qquad \text{odnosno} \qquad j = \frac{1}{f} = +2\,D\,.$$

Zadatak se može rešiti i na ***drugi način***: stavljanjem naočara postiže se da ako se predmet nalazi na daljini jasnog vida normalnog ljudskog oka $p = 25\,cm$, njegov lik bude formiran na rastojanju na kome ga dalekovid čovek jasno vidi: $\ell = -p_1 = -50\,cm$ (predznak „– " pošto je lik imaginaran jer se nalazi ispred sočiva). Odavde je:

$$-\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{p\,p_1}{p_1 - p} = 50\,cm \qquad \text{i} \qquad j = +2\,D\,.$$

10.4. Kratkovid čovek može jasno da vidi predmet ako se nalazi na udaljenosti ne većoj od $20\,cm$ od oka. Kolika treba da bude optička moć sočiva naočara koje on mora da nosi?

REŠENJE:

Bez naočara ($p_1 \equiv s_1 = 20\,cm$) imamo da je:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{\ell} = \frac{1}{f_o} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\ell} = \frac{1}{f_o} - \frac{1}{p_1} \, .$$

Ako se predmet nalazi na rastojanju većem od $20\,cm$ ispred očog sočiva, njegov lik se ne formira na žutoj mrlji, već ispred nje. Sa naočarima, čovek vidi predmete koji se nalaze i na mnogo većim rastojanjima od p_1, čak i one koji su „beskonačno" udaljeni (najdalja tačka jasnog vida normalnog ljudskog oka, $p \to \infty$). U tom slučaju je:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\ell} = \frac{1}{f_o} + \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\ell} = \frac{1}{f_o} + \frac{1}{f} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f_o} + \frac{1}{f} \, .$$

Izjednačavanjem gornjih relacija dobija se:

$$\frac{1}{f_o} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f_o} + \frac{1}{f} \, ,$$

odnosno:

$$f = -p_1 = -20\,cm \qquad \text{i} \qquad j = -5\,D \, .$$

Drugi način: Uloga sočiva naočara je da „pomeri" predmet iz beskonačnosti na rastojanje sa koga se on jasno vidi. Dakle, čovek treba da koristi naočare koje će davati imaginarni lik beskonačno udaljenog predmeta na rastojanju od $20\,cm$. Iz:

$$\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\ell} = \frac{1}{f} \, ,$$

dobija se:

$$f = -\ell = -20\,cm \quad j = \frac{1}{f} = -5\,D \, .$$

10.5. Kakve naočare treba da nosi:

a) **dalekovid čovek kome je daljina jasnog vida $50\,cm$;**

b) **kratkovid čovek kome je daljnja tačka akomodacije $40\,cm$?**

REŠENJE:

a) Sa naočarima, daljina jasnog vida je $s = 25\,cm$, a bez njih $s_1 = 50\,cm$. Prema tome, ako se predmet nalazi na rastojanju s, njegov imaginarni lik u sočivu naočara treba da bude na rastojanju s_1 od oka:

$$j = \frac{1}{s} - \frac{1}{s_1} \quad \Rightarrow \quad j = +2\,D\ .$$

b) Sa naočarima, daljnja tačka akomodacije je beskonačno daleka, a bez naočara je $x = 40\,cm$. Dakle, imaginarni lik beskonačno dalekog predmeta u sočivu naočara treba da se formira na rastojanju x od oka:

$$\frac{1}{\infty} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f} = j \quad \Rightarrow \quad j = -\frac{1}{x} = -2,5\,D\ .$$

10.6. Bliska i daljnja tačka akomodacije kratkovidog čoveka su $8\,cm$ i $17\,cm$. Na kojim rastojanjima se nalaze ove tačke ako čovek stavi naočare jačine $-4\,D$?

REŠENJE:

Neka je $x = 8\,cm$ bliska tačka akomodacije samog oka, a x' bliska tačka akomodacije oka sa sočivom naočara. Kada se predmet nalazi na rastojanju x', njegov lik u sočivu naočara formira se na rastojanju x od oka:

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{x\,f}{f - x} \approx 12\,cm.$$

Na sličan način se dobija da je daljnja tačka akomodacije:

$$y' = \frac{y\,f}{f - y} = 53\,cm.$$

10.7. Čovek normalnog vida stavio je naočare jačine $+3\,D$.

a) Na kolikom rastojanju on treba da drži predmet da bi ga jasno video bez naprezanja očnog mišića?;

b) Na kolikom maksimalnom rastojanju čovek može da drži predmet da bi ga video?

REŠENJE:

Prema rezultatu zadatka 10.2, akomodacija oka jednaka je:

$$\Delta j = j_{blisko} - j_{daleko} = \frac{1}{s} + \frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell} = \frac{1}{s} = \frac{1}{25 \cdot 10^{-2} m} = 4\,D\ .$$

Sa naočarima čija je dioptrija $+3\,D$ akomodacija je $j = +7\,D$, te je:

$$\frac{1}{x} = j \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{7}\,m = 14,3\,cm\ .$$

Svrha naočara je da očuvaju da akomodacija ostane na vrednosti $+4\,D$, te je:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 4\,D\ ,$$

odnosno:

$$\frac{1}{y} = 7\,D - 4\,D \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}\,m = 0,33\,cm\ .$$

Zadaci za samostalni rad:

10.8. Za čitanje teksta čovek koristi naočare jačine $-4\,D$. Na kolikom rastojanju on treba da drži ravno ogledalo da bi u njemu video svoj lik bez korišćenja naočara?

10.9. Odrediti jačinu sočiva potrebnog za korekciju kratkovidog oka, kod koga je najdalja tačka jasnog vida na udaljenosti od $1\,m$, a najbliža tačka jasnog vida na $25\,cm$. Uzeti da je udaljenost mrežnjače od očnog sočiva $\ell \approx 2\,cm$.

10.10. Kratkovida osoba ima najbližu tačku jasnog vida na $15\,cm$ od oka bez naočara. Kolika će biti daljina jasnog vida ako osoba nosi naočare sa korektivnim sočivima od $-1\,D$?

10.11. Odrediti jačinu korektivnog sočiva kod dalekovidog oka potrebnu da omogući osobi, čija je najbliža tačka jasnog vida $2\,m$, da čita tekst bez naprezanja na udaljenosti od $0,25\,m$.

11. Fotometrija

11.1. Sa koje udaljenosti posmatrač još uvek može da vidi upaljenu cigaretu u potpuno mračnoj noći, ako je svetlosni intenzitet upaljene cigarete $I = 0,0025\,cd$? Najmanji svetlosni fluks koji okom može da se zapazi je $\Phi = 10^{-13}\,\ell m$, a površina zenice u mraku iznosi $S = 0,4\,cm^2$.

REŠENJE:

Zenicu oka smatraćemo tačkastom, tako da je njena osvetljenost:

$$E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha \; .$$

Odavde se za udaljenost između izvora svetlosti i zenice dobija:

$$r = \sqrt{\frac{I\cos\alpha}{E}} \; . \qquad (1)$$

Svetlosni fluks koji stiže do zenice je $\Phi = E \cdot S$, gde je E osvetljenost zenice, a S njena površina. Sledi da je:

$$E = \frac{\Phi}{S} \; . \qquad (2)$$

Uvrštavanjem izraza (2) u izraz (1) dobija se:

$$r = \sqrt{\frac{IS\cos\alpha}{\Phi}} \; .$$

Ovo rastojanje najveće je za $\alpha = 0$, tj. za $\cos\alpha = 1$, kada svetlost upada normalno na površinu zenice. Traženo rastojanje prema tome iznosi:

$$r = \sqrt{\frac{IS}{\Phi}} = 1000\,m \; .$$

11.2. Tačkast izvor svetlosti S jačine $I = 100\,cd$ postavljen je u geometrijskom centru prostorije u obliku kocke sa ivicom $a = 4\,m$. Odrediti:

a) ukupan svetlosni fluks koji pada na pod prostorije;

b) srednju osvetljenost poda;

c) najveću i najmanju vrednost osvetljenosti poda.

REŠENJE:

a) Ukupan svetlosni fluks koji daje svetlosni izvor je:

$$\Phi = 4\pi I \ .$$

Svetlosni fluks Φ_1 koji pada na pod prostorije je:

$$\Phi_1 = \frac{1}{6}\Phi = \frac{2\pi}{3} I = 209,33\,\ell m \ .$$

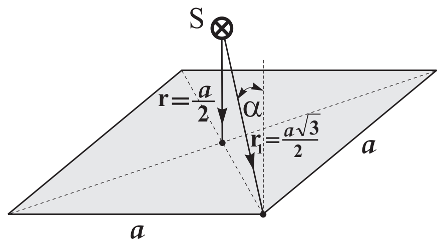
b) Srednja osvetljenost poda iznosi:

$$E = \frac{\Phi_1}{a^2} = 13,08\,\ell x \ .$$

c) Najosvetljenija tačka poda nalazi se u preseku dijagonala, neposredno ispod sijalice ($\alpha = 0$), tako da je:

$$E_{\max} = \frac{I}{r^2} = \frac{I}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \frac{4I}{a^2} = 25\,\ell x \ .$$

Najmanju osvetljenost imaju tačke koje leže u temenima kvadrata. Njihovo rastojanje od izvora je:



$$r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \ ,$$

odnosno polovina prostorne dijagonale kocke, dok je:

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{a}{2}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

Dakle, za minimalnu osvetljenost se dobija:

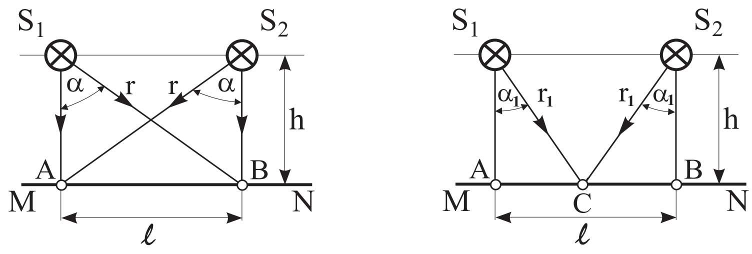
$$E_{\min} = \frac{I}{r_1^2}\cos\alpha = \frac{4\sqrt{3}I}{9a^2} = 4,8\,\ell x \ .$$

11.3. Dva tačkasta svetlosna izvora S_1 i S_2 osvetljavaju površinu MN. Izvori se nalaze na međusobnom rastojanju $\ell = 1\,m$ i na visini $h = 2\,m$ iznad površine koju osvetljavaju.

a) Koliko iznose osvetljenosti u tačkama A i B, ako svaki od svetlosnih izvora emituje totalni svetlosni fluks od $\Phi = 2100\,\ell m$?

b) Koliko iznosi osvetljenost tačke C koja leži na sredini rastojanja između A i B?

REŠENJE:



a) b)

a) Osvetljenosti tačaka A i B međusobno su jednake i predstavljaju zbir osvetljenosti koje potiču od izvora S_1 i S_2, odnosno:

$$E_A = E_B = E_1 + E_2 \;, \tag{1}$$

gde je E_1 osvetljenost u tački A koja potiče od izvora S_1, a E_2 osvetljenost tačke A koja potiče od izvora S_2. Prema tome:

$$E_1 = \frac{I}{h^2} \quad \text{i} \quad E_2 = \frac{I}{r^2}\cos\alpha \;, \tag{2}$$

gde je $I = \Phi/4\pi$ intenzitet izvora S_1 i S_2. Sa slike se vidi da važi:

$$r^2 = h^2 + \ell^2 \;, \tag{3}$$

kao i da je:

$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+\ell^2}} \;. \tag{4}$$

Uvrštavanjem izraza (2), (3) i (4) u izraz za osvetljenost, konačno se dobija:

$$E_A = E_B = \frac{\Phi}{4\pi h^2}\left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{\ell^2}{h^2}\right)^{3/2}}\right] = 71,7\,\ell x \;.$$

b) Osvetljenost tačke C jednaka je:

$$E_C = E_1' + E_2' = 2E_1' \ ,$$

gde je:

$$E_1' = \frac{I}{{r_1}^2} \cos\alpha_1 \ .$$

Važe takođe i relacije (videti sliku):

$${r_1}^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \quad \text{i} \quad \cos\alpha_1 = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}} \ .$$

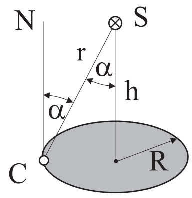
Odavde se za osvetljenost tačke C dobija:

$$E_C = \frac{\Phi}{2\pi h^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\ell}{2h}\right)^2\right]^{3/2}} = 76,3\,\ell x \ .$$

11.4. Na stubu visokom $h = 6\,m$ nalazi se svetlosni izvor jačine $I = 3000\,cd$. Koliko iznosi površina kruga, na zemlji ispod stuba, unutar kojeg osvetljenost nije manja od $E_C = 2\,\ell x$?

REŠENJE:

Sa slike se vidi da je osvetljenost tačke C:



$$E_C = \frac{I}{r^2} \cos\alpha \ ,$$

gde je $r^2 = R^2 + h^2$, a $\cos\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}$. Tako se za osvetljenost E_C dobija izraz:

$$E_C = \frac{Ih}{(R^2 + h^2)^{3/2}} \ .$$

Rešavanjem ovog izraza po R^2 dobija se:

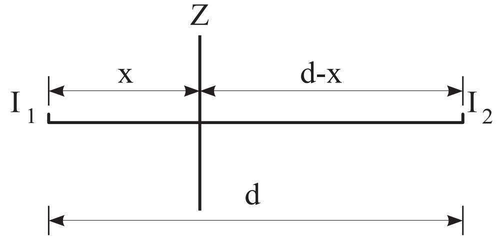
$$R^2 = \sqrt[3]{\frac{I^2 h^2}{E_C^2}} - h^2 \ .$$

Prema tome, tražena površina kruga $S = R^2\pi$ iznosi:

$$S = \left[\sqrt[3]{\left(\frac{Ih}{E_C}\right)^2} - h^2\right] \cdot \pi = 1243,4\,m^2 \ .$$

11.5. Dve sijalice intenziteta $I_1 = 5\,cd$ i $I_2 = 20\,cd$ nalaze se na međusobnom rastojanju $d = 150\,cm$. Odrediti na kom mestu treba postaviti zaklon, da bi se sa obe njegove strane postigla ista osvetljenost?

REŠENJE:



Prema uslovu zadatka mora biti ispunjeno:

$$E_1 = E_2 \ , \tag{1}$$

gde su E_1 i E_2 osvetljenosti jedne i druge strane zaklona, odnosno:

$$E_1 = \frac{I_1}{x^2} \quad \text{i} \quad E_2 = \frac{I_2}{(d-x)^2} \ . \tag{2}$$

Izjednačavanjem poslednje dve jednačine dobija se:

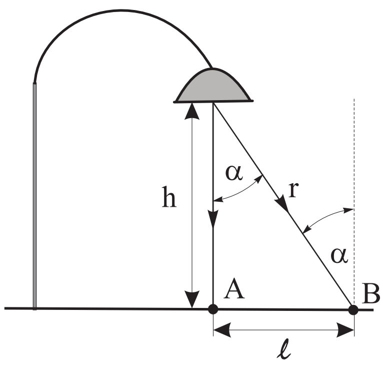
$$\left(\frac{d-x}{x}\right)^2 = \frac{I_2}{I_1}$$

odakle je:

$$x = \frac{d}{1+\sqrt{\frac{I_2}{I_1}}} = 0,5\,m \ .$$

11.6. Ulična svetiljka nalazi se na visini $h = 10\,m$ iznad tla. Odrediti udaljenost tačaka A i B na zemlji, ako je poznato da je odnos osvetljenosti u tim tačkama $E_A/E_B = 8$. Tačka A nalazi se neposredno ispod svetiljke.

REŠENJE:



Osvetljenost tačke A je:

$$E_A = \frac{I}{h^2} \; , \tag{1}$$

a tačke B:

$$E_B = \frac{I}{r^2} \cos\alpha \; , \tag{2}$$

sa slike se vidi da je:

$$r^2 = h^2 + \ell^2 \quad \text{i} \quad \cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \ell^2}} \; .$$

Prema tome, osvetljenost (2) može se napisati kao:

$$E_B = \frac{Ih}{\sqrt{(h^2 + \ell^2)^3}} \; , \tag{3}$$

gde je ℓ rastojanje između tačaka A i B, tj. $\overline{AB} = \ell$. Uvrštavanjem izraza (1) i (3) u uslov zadatka: $E_A/E_B = 8$, dobija se:

$$8h^3 = \sqrt{(h^2 + \ell^2)^3} \; . \tag{4}$$

Rešavanjem jednačine (4) po ℓ sledi:

$$\ell = h \cdot \sqrt{\sqrt[3]{64} - 1} = 17,3\,m \; .$$

11.7. Površina laboratorije za fiziku iznosi $S = 80\,m^2$, a njena srednja osvetljenost je $E = 50\,\ell x$. Koliki je intenzitet svetlosti koji daju električne sijalice, ako se za osvetljavanje laboratorije koristi $\eta = 25\%$ ukupnog svetlosnog fluksa koji emituju sijalice?

REŠENJE:

Srednja osvetljenost laboratorije iznosi:

$$E = \frac{\Phi}{S}\,, \tag{1}$$

gde je Φ svetlosni fluks koji pada na površinu laboratorije S. Odavde sledi da je:

$$\Phi = E \cdot S = 4 \cdot 10^3\,\ell m\,, \tag{2}$$

ukupan svetlosni fluks kojim je laboratorija osvetljena. Ovaj fluks predstavlja $\eta = 25\%$ od ukupnog svetlosnog fluksa Φ_0 koji sijalice emituju, pa je prema tome:

$$\Phi = \eta \cdot \Phi_0\,,$$

odnosno:

$$\Phi_0 = \frac{\Phi}{\eta} = 16 \cdot 10^3\,\ell m\,. \tag{3}$$

Za traženi intenzitet svetlosti dobija se:

$$I = \frac{\Phi_0}{4\pi} = \frac{E\,S}{4\pi\eta} = 1274\,cd\,.$$

11.8. Sijalica snage $P = 60\,W$ izrači $\eta = 2\%$ utrošene električne energije u vidu svetlosti. Izračunati intenzitet svetlosnog izvora (sijalice), smatrajući sijalicu izotropnim tačkastim izvorom.

REŠENJE:

Svetlosni fluks Φ koji emituje sijalica iznosi $\eta = 2\%$ od ukupne snage sijalice, odnosno:

$$\Phi = \eta \cdot P = 1,2\,W\,,$$

što u vizuelnim jedinicama iznosi:

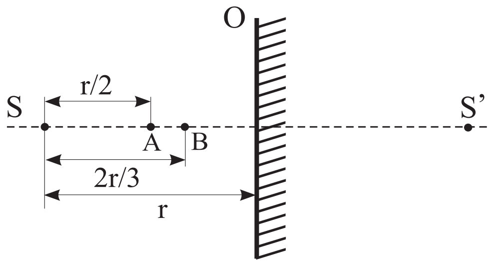
$$\Phi = \frac{1,2}{0,0016}\,\ell m = 750\,\ell m\,.$$

Kako se sijalica smatra izotropnim izvorom, sledi da je intenzitet sijalice:

$$I = \frac{\Phi}{4\pi} = 60\,cd\ .$$

11.9. Na rastojanju $r = 70\,cm$ od tačkastog svetlosnog izvora S jačine $I = 20\,cd$ nalazi se ravno ogledalo O. Odrediti osvetljenosti E_A i E_B u tačkama A i B, koje se nalaze na rastojanjima $r_A = r/2$ i $r_B = 2r/3$ od svetlosnog izvora S, kao što je prikazano na slici.

REŠENJE:



Zbog prisustva ravnog ogledala O, u njemu se formira imaginaran lik S' izvora S, kao što je prikazano na slici. Osvetljenosti tačaka A i B jednake su zbiru osvetljenosti ovih tačaka koje potiču od svakog od ovih izvora posebno, odnosno:

$$E_A = E_A^S + E_A^{S'} \quad \text{i} \quad E_B = E_B^S + E_B^{S'}\ , \tag{1}$$

gde je:

$$E_A^S = \frac{I}{{r_A}^2} \quad \text{i} \quad E_A^{S'} = \frac{I}{(2r - r_A)^2}\ , \tag{2}$$

odnosno za tačku B :

$$E_B^S = \frac{I}{{r_B}^2} \quad \text{i} \quad E_B^{S'} = \frac{I}{(2r - r_B)^2}\ , \tag{3}$$

Uvrštavanjem $r_A = r/2$ i $r_B = 2r/3$ u gornje izraze, za osvetljenost tačaka A i B konačno se dobija:

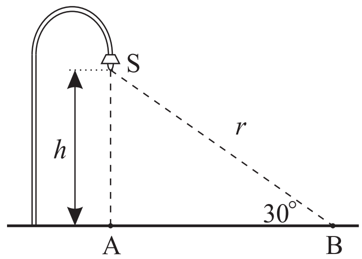
$$E_A = \frac{40}{9} \cdot \frac{I}{r^2} = 181,4\,\ell x\ ,$$

$$E_B = \frac{45}{16} \cdot \frac{I}{r^2} = 114,8\,\ell x\ .$$

Zadaci za samostalni rad:

11.10. **Svetlost sijalice pada na knjigu koja se nalazi na stolu pod uglom $\alpha = 60^\circ$ prema ravni stola i na njoj stvara osvetljenost $E = 70\,\ell x$. Svetlosna jačina sijalice u svim pravcima iznosi $I = 200\,cd$. Na kolikom rastojanju i na kojoj visini se nalazi sijalica u odnosu na knjigu?**

11.11. **U tački B na putu prikazanom na slici izmerena je osvetljenost $E_B = 4\,\ell x$, koja potiče od sijalice S. Kolika je najveća osvetljenost na putu?**



11.12. **Nad stolom kvadratnog oblika postavljena je sijalica na visini $h = 2\,m$ iznad njegovog centra. Osvetljenost centra stola je $E_C = 40\,\ell x$, a osvetljenost njegovog ugla (temena kvadrata) $E_T = 30\,\ell x$. Odrediti intenzitet svetlosti koji daje električna sijalica, kao i dužinu stranice stola, smatrajući sijalicu tačkastim svetlosnim izvorom.**

11.13. **Otvorena knjiga dimenzija $24\,cm \times 32\,cm$ osvetljena je sijalicom jačine $I = 100\,cd$. Knjiga je postavljena u položaj najveće osvetljenosti, koja iznosi $E = 150\,\ell x$.**

a) **Koji deo svetlosnog fluksa sijalice padne na knjigu?**
b) **Na kom rastojanju od svetlosnog izvora (sijalice) se ona nalazi? Sijalicu smatrati izotropnim tačkastim svetlosnim izvorom, a osvetljenost knjige ravnomernom.**

11.14. Udaljenost Marsa od Sunca iznosi $d_M = 1,5\,aj$ ($aj-$ astronomska jedinica dužine), dok je udaljenost Zemlje od Sunca $d_Z = 1\,aj$. Koliko puta je osvetljenost Zemlje veća od osvetljenosti Marsa? Kolika je osvetljenost površine Marsa, ako je osvetljenost Zemljine površine $E_Z = 100000\,\ell x$?

11.15. Dva svetlosna izvora svetlosih jačina $I_1 = 40\,cd$ i $I_2 = 25\,cd$ nalaze se na nekom rastojanju. Koliko puta se smanji osvetljenost tačaka na simetrali duži koja spaja izvore kada se isključi drugi izvor?

11.16. Kolika je srednja osvetljenost poda fiskulturne sale površine $S = 72\,m^2$, ako se za njegovo osvetljavanje koristi $\eta = 25\%$ ukupnog svetlosnog fluksa $\Phi_0 = 12000\,\ell m$ koji emituju električne sijalice na tavanici?

Koristiti sledeće vrednosti konstanti:

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \, \dfrac{W}{m^2 \cdot K^4}$, $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \, K \cdot m$, $c = 3 \cdot 10^8 \, \dfrac{m}{s}$,
$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \, J\,s$, $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \, J\,s$, $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \, \dfrac{F}{m}$,
$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \, kg$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \, C$, $T\,[K] = t\,[^\circ C] + 273$
$R_H = 1,097 \cdot 10^7 \, m^{-1}$, $1\,eV = 1,6 \cdot 10^{-19} \, J$.